

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Valentino Vuk**

Zagreb, 2014.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

## **IZBOR PRIKLADNOG PLANA POKUSA ZA ISTRAŽIVANJE SILA REZANJA**

Mentor:

**Prof. dr. sc. Stephan Škorić**

Student:

**Valentino Vuk**

Zagreb, 2014.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Stephanu Škoriću na stručnoj pomoći i savjetima, preporučenoj literaturi, utrošenom vremenu i prije svega ugodnoj radnoj atmosferi i motivaciji za rad.

Valentino Vuk



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo  
materijala i mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **VALENTINO VUK**

Mat. br.: 0035165358

Naslov rada na  
hrvatskom jeziku:

**IZBOR PRIKLADNOG PLANA POKUSA ZA ISTRAŽIVANJE SILA  
REZANJA**

Naslov rada na  
engleskom jeziku:

**SELECTION OF ADEQUATE EXPERIMENT PLAN FOR  
RESEARCH INTO CUTTING FORCES**

Opis zadatka:

Nova proizvodna filozofija pretpostavlja uvođenje novih obradnih postupaka, novih obradnih strojeva i alata u proizvodni proces, a rezultira istodobno velikim povećanjem proizvodnosti rada, poboljšanjem kvalitete proizvoda i snižavanjem troškova proizvodnje. U ostvarivanju toga trenda nužno je kontinuirano istraživanje pokazatelja obradivosti materijala pri obradama odvajanjem čestica. Istraživač je pri tome orijentiran na eksperiment. U tu svrhu se primjenjuju različiti matematički modeli, a za definiranje njihovih parametara koriste se različite metode eksperimenata.

U prvom dijelu rada potrebno je objasniti pojam obradivosti materijala, metodologiju istraživanja funkcija obradivosti te moguće planove pokusa i načine obrade rezultata.

U drugom dijelu rada potrebno je prikazati eksperimentalno istraživanje utjecaja veličina procesa rezanja na sile rezanja i opisati ih prikladnim matematičkim modelima. Pri tome treba koristiti planove pokusa za matematičke modele prvog i drugog stupnja te učiniti komparativnu analizu dobivenih rezultata.

Zadatak zadan:

25. rujna 2014.

Rok predaje rada:

27. studenog 2014.

Predvideni datum obrane:

3., 4. i 5. prosinca 2014.

Zadatak zadao:

Prof. dr. sc. Stephan Škorić

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Franjo Cajner



## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA.....	V
POPIS OZNAKA .....	VI
SAŽETAK.....	VIII
SUMMARY .....	IX
1. UVOD.....	1
2. OSNOVE OBRADIVOSTI ODVAJANJEM ČESTICA.....	3
2.1. Definicija obradivosti materijala.....	3
2.2. Kriteriji, metode i funkcije obradivosti.....	4
2.2.1. Kriteriji obradivosti.....	4
2.2.1.1. Postojanost alata .....	4
2.2.1.2. Sile rezanja .....	5
2.2.1.3. Kvaliteta obrađene površine.....	15
2.2.1.4. Oblik odvojene čestice .....	15
2.2.2. Metode i funkcije obradivosti .....	16
2.3. Matematičko modeliranje funkcija obradivosti .....	17
2.3.1. Funkcije obradivosti.....	17
2.3.2. Plan pokusa .....	18
2.3.3. Matematički modeli .....	21
2.3.4. Višefaktorski plan pokusa prvog stupnja .....	22
2.3.5. Ponavljanje eksperimentalnih točaka pokusa .....	24
2.3.6. Višefaktorski plan pokusa drugog stupnja – Centralno kompozitni plan pokusa.....	28
2.4. Regresijska analiza.....	31
2.4.1. Model jednostavne linearne regresije.....	32
2.4.2. Model višestruke linearne regresije .....	37
2.4.3. Testiranje hipoteza .....	41
2.4.3.1. Ispitivanje signifikantnosti parametara $b_j$ u modelu (t-test).....	41
2.4.3.2. Ispitivanje adekvatnosti modela (F-test) .....	43
2.4.4. Analiza nelinearnih matematičkih modela.....	44
2.4.4.1. Regresijski polinom.....	44
2.4.4.2. Eksponencijalni model višestruke regresije .....	46
2.4.4.3. Recipročni model .....	47
2.4.5. Ispitivanje adekvatnosti nelinearnih modela.....	48
3. Eksperimentalni dio .....	49
3.1. Cilj i metodologija ispitivanja.....	49
3.2. Planiranje i priprema .....	50
3.2.1. Stroj.....	50
3.2.2. Alat.....	51
3.2.3. Materijal obratka .....	52

3.3. Rezultati .....	56
3.3.1. Model prvog stupnja - eksponencijalni model - za prošireni plan pokusa.....	56
3.3.2. Model drugog stupnja za prošireni plan pokusa .....	62
3.3.3. Analiza rezultata eksponencijalnog modela i modela drugog stupnja .....	67
3.3.4. Plan pokusa sa ponavljanjem u centru .....	68
3.3.4.1. Polinom prvog stupnja – modul „Multiple regression“ .....	68
3.3.4.2. Polinom prvog stupnja – modul „Experimental design (DOE)“ .....	71
3.3.5. Plan pokusa bez ponavljanja u centru .....	73
3.3.5.1. Polinom prvog stupnja – modul „Multiple regression“ .....	73
3.3.5.2. Eksponencijalni model – modul „Nonlinear estimation“ .....	76
3.3.6. Analiza rezultata .....	79
4. ZAKLJUČAK.....	80
5. LITERATURA .....	81

## POPIS SLIKA

- Slika 1.1. Podjela postupaka obrade odvajanjem čestica [1]
- Slika 1.2. Podjela postupaka obrade odvajanjem čestica [1]
- Slika 2.1. Sile rezanja kod ortogonalnog rezanja [1]
- Slika 2.2. Ortogonalno rezanje [9]
- Slika 2.3. Merchantova kružnica [1]
- Slika 2.4. Komponente sile rezanja kod kosog rezanja [1]
- Slika 2.5. Koso rezanje [9]
- Slika 2.6. Poprečni presjek rezanja [1]
- Slika 2.7. Ovisnost specifične sile  $k_c$  o debljini odvojene čestice  $h$  [4]
- Slika 2.8. Shematski prikaz procesa obrade odvajanjem čestica [12]
- Slika 2.9. Blok shema protokola eksperimentalnog istraživanja [12]
- Slika 2.10. Raspored eksperimentalnih točaka u planu pokusa "22+2" [12]
- Slika 2.11.  $2^k$  plan pokusa sa točkama u centru [21]
- Slika 2.12.  $2^k$  plan pokusa sa točkama u centru [21]
- Slika 2.13. Centralno složeni plan pokusa (dva faktora) [21]
- Slika 2.14. Centralno složeni plan pokusa (tri faktora) [21]
- Slika 2.15. Raspored eksperimentalnih točaka u planu pokusa "22+2 .2+5" [12]
- Slika 2.16. Dijagram toka regresijske analize [18]
- Slika 2.17. Tipični dijagrami rasipanja [22]
- Slika 2.18. Regresijski pravac [20]
- Slika 2.19. Raščlamba odstupanja [20]
- Slika 2.20. Primjeri kretanja koeficijenata korelacije za različite grupe podataka [13]
- Slika 2.21. Geometrijski prikaz modela višestruke regresije s dvije nezavisne varijable [17]
- Slika 2.22. t-distribucija sa kritičnim točkama [20]
- Slika 2.23. F-distribucija sa kritičnim vrijednostima [20]
- Slika 2.24. Primjer nelinearnih odnosa među varijablama [20]
- Slika 2.25. Usporedba opisa podataka [20]
- Slika 2.26. Primjer odnosa za specifični recipročni model [20]
- Slika 3.1. Dijagram ovisnosti glavne sile rezanja  $F_c$  o brzini rezanja  $v_c$
- Slika 3.2. Tokarski obradni centar Trens SBL-500 [24]
- Slika 3.3. Držač DDJNL2525M15 i pločica DNMG150608-M3 [23]
- Slika 3.4. Obradak i mjerni uređaj u radnom prostoru stroja
- Slika 3.5. Shematski prikaz mjernog uređaja u radnom prostoru stroja [16]
- Slika 3.6. Unutarnja građa mjernog uređaja za mjerenje sila [16]

- Slika 3.7. Princip rada senzora sila – Piezoelektrični efekt [16]
- Slika 3.8. Diskovi kvarca – bez opterećenja i pod opterećenjem [16]
- Slika 3.9. Pretvornik signala
- Slika 3.10. Korisničko sučelje
- Slika 3.11. Rezultati obrade podataka – eksponencijalni model
- Slika 3.12. Dijagram usporedbe rezultata eksperiment – model
- Slika 3.13. Dijagram ovisnosti  $F_c = f(f, v_c)$  za  $a_p = 1,75 \text{ mm}$
- Slika 3.14. Dijagram ovisnosti  $F_c = f(a_p, v_c)$  za  $f = 0,2 \text{ mm}$
- Slika 3.15. Rezultati obrade podataka – model 2. stupnja
- Slika 3.16. Dijagram usporedbe rezultata eksperiment – model
- Slika 3.17. Dijagram ovisnosti  $F_c = f(a_p, f)$
- Slika 3.18. Grafički prikaz vrijednosti sume kvadrata ostataka
- Slika 3.19. Rezultati obrade podataka – Polinom prvog stupnja
- Slika 3.20. Dijagram usporedbe rezultata eksperiment – model
- Slika 3.21. Rezultati obrade podataka
- Slika 3.22. Dijagram usporedbe rezultata eksperiment – model
- Slika 3.23. Rezultati obrade podataka – Polinom prvog stupnja
- Slika 3.24. Dijagram usporedbe rezultata eksperiment – model
- Slika 3.25. Rezultati obrade podataka – Eksponencijalni model
- Slika 3.26. Dijagram usporedbe rezultata eksperiment – model
- Slika 3.27. Usporedba vrijednosti koeficijenata korelacije i ostataka

## POPIS TABLICA

Tablica 2.1.	Matrica plana pokusa " $2^2+2$ " [12]
Tablica 2.2.	Matrica plana pokusa " $2^k$ " (bez podataka za centar plana) [12]
Tablica 2.3.	Matrica plana pokusa " $2^2+2\cdot 2+5$ " [12]
Tablica 2.4.	Tablica analize varijance (Tabela ANOVA) [17]
Tablica 2.5.	Tabela ANOVA za višestruku regresiju [17]
Tablica 2.6.	Tabela ANOVA za višestruku regresiju (preko rasipanja u centru) [11]
Tablica 2.7.	Izvorni oblik ANOVA tablice za modul „nonlinear estimation“ [26]
Tablica 2.8.	ANOVA tablica za modul „nonlinear estimation“
Tablica 3.1.	Kemijski sastav materijala 34CrNiMo6 (Č 5431) i tvrdoća nakon poboljšanja
Tablica 3.2.	Razine variranja faktora za matematički model prvog stupnja
Tablica 3.3.	Matrica za plan pokusa prvog stupnja
Tablica 3.4.	Vrijednosti parametara eksponencijalnog modela za glavnu silu rezanja $F_c$
Tablica 3.5.	Analiza varijance za eksponencijalni model
Tablica 3.6.	Eksperimentalni rezultati, rezultati modela i ostatak
Tablica 3.7.	Nepotpuna matrica za plan pokusa drugog stupnja
Tablica 3.8.	Vrijednosti parametara modela 2. stupnja za glavnu silu rezanja $F_c$
Tablica 3.9.	Analiza varijance za model 2. stupnja
Tablica 3.10.	Eksperimentalni rezultati, rezultati modela i ostatak
Tablica 3.11.	Matrica plana pokusa sa ponavljanjem u centru
Tablica 3.12.	Vrijednosti svih parametara polinoma prvog stupnja za glavnu silu rezanja $F_c$
Tablica 3.13.	Vrijednosti parametara polinoma prvog stupnja za glavnu silu rezanja $F_c$
Tablica 3.14.	Analiza varijance za polinom prvog stupnja
Tablica 3.15.	Eksperimentalni rezultati, rezultati modela i ostatak
Tablica 3.16.	Vrijednosti parametara polinoma prvog stupnja za glavnu silu rezanja $F_c$
Tablica 3.17.	Analiza varijance za polinom prvog stupnja
Tablica 3.18.	Eksperimentalni rezultati, rezultati modela i ostatak
Tablica 3.19.	Matrica za plan pokusa za polinom prvog stupnja
Tablica 3.20.	Vrijednosti svih parametara polinoma prvog stupnja za glavnu silu rezanja $F_c$
Tablica 3.21.	Vrijednosti parametara polinoma prvog stupnja za glavnu silu rezanja $F_c$
Tablica 3.22.	Analiza varijance za polinom prvog stupnja
Tablica 3.23.	Eksperimentalni rezultati, rezultati modela i ostatak
Tablica 3.24.	Vrijednosti parametara eksponencijalnog modela za glavnu silu rezanja $F_c$
Tablica 3.25.	Analiza varijance za eksponencijalni model
Tablica 3.26.	Eksperimentalni rezultati, rezultati modela i ostatak

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$a_p$	[mm]	Dubina rezanja
$C_T$		Taylor-ova konstanta
$D$	[mm]	Promjer obratka
$f$	[mm]	Posmak
$F_c$	[N]	Glavna sila rezanja
$F_f$	[N]	Posmična sila rezanja
$F_p$	[N]	Natražna sila rezanja
$F_R$	[N]	Rezultantna sila rezanj
$F_{sh}$	[N]	Sila smicanja u ravnini smicanja
$F_{shN}$	[N]	Normalna sila na ravninu smicanja
$F_\gamma$	[N]	Tangencijalna sila na prednjoj površini alata
$F_{\gamma N}$	[N]	Normalna sila na prednjoj površini alata
$G$	[N]	Težina odvojene čestice
$h$	[mm]	Debljina rezanja
$b$	[mm]	Širina rezanja
$I_o$		Indeks obradivosti
$k$		Broj faktora pokusa
$K_o$		Kriterij obradivosti
$K_{oIM}$		Kriterij obradivosti ispitivanog materijala
$K_{oEM}$		Kriterij obradivosti etalon materijala
$m$		Eksponent Taylor-ove jednadžbe
$\alpha$	[°]	Stražnji kut alata
$\beta$	[°]	Kut klina
$\varepsilon$	[°]	Čeoni kut
$\gamma$	[°]	Prednji kut alata
$\tau_{sh}$	[N mm <sup>-2</sup> ]	Smično naprezanje
$\phi$	[°]	Kut smične ravnine
$1-m$		Eksponent ovisan o materijalu obratka
$\kappa_r$	[°]	Kut namještanja kut
$\lambda$	[°]	Kut nagiba oštrice alata
$k_c$	[N m <sup>-2</sup> ]	Specifična sila rezanja
$k_{c1 \times 1}$	[N m <sup>-2</sup> ]	Specifična jedinična sila rezanja
$\mu$		Koeficijent trenja na prednjoj površini alata
$\mu_{sh}$		Koeficijent trenja u ravnini smicanja
$\rho$	[°]	Kut trenja
$A_{sh}$	[mm <sup>2</sup> ]	Površina presjeka smicanja

$n_c$		Broj ponavljanja u centru
$n$		Broj eksperimentalnih točaka izvora regresije
$R_e$	[N/mm <sup>2</sup> ]	Granica razvlačenja
$r^2=R$		Koeficijent determinacije
$r$		Koeficijent korelacije
$s_R$		Standardna devijacija
$s_R^2$		Procijenjena varijanca regresije
SKO		Suma kvadrata odstupanja
$T$	[min]	Postojanosti alata
$v_c$	[m/min]	Brzina rezanja
$V_m$	[m <sup>3</sup> ]	Volumen odvojene čestice
$V_s$		Koeficijent varijacije
$\alpha$		Razina pouzdanosti
$\varepsilon$		Ostatak (greška)
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	Gustoća obratka

## SAŽETAK

U diplomskom radu „Izbor prikladnog plana pokusa za istraživanje sila rezanja“ obrađene su spoznaje o obradivosti materijala kod postupaka obrade odvajanjem čestica sa ciljem definiranja najpovoljnijeg plana pokusa i matematičkog modela za određivanje glavne sile rezanja kod tokarenja.

Rad je podijeljen na dva dijela. U prvom, teorijskom, dijelu objašnjene su definicije, kriteriji, metode i funkcije obradivosti materijala. Poseban naglasak stavljen je na matematičko modeliranje funkcija obradivosti koje obuhvaća plan pokusa, odabir matematičkih modela i regresijsku analizu i tumačenje rezultata.

U drugom dijelu rada prikazano je eksperimentalno istraživanje utjecaja parametara procesa rezanja na sile rezanja. Korišteni su planovi pokusa za matematičke modele prvog i drugog stupnja. Rezultati dobiveni eksperimentom obrađeni su programskim paketom Statsoft Statistica v10.0.1011 nakon čega je napravljena komparativna analiza rezultata za različite planove pokusa.

Ključne riječi: obradivost; plan pokusa, matematički model; regresija



## SUMMARY

In diploma thesis „Selection of adequate experiment plan for research into cutting forces“ are studied insights about material machinability with objective to determine the best experiment plan and mathematical model for determining main cutting force in turning.

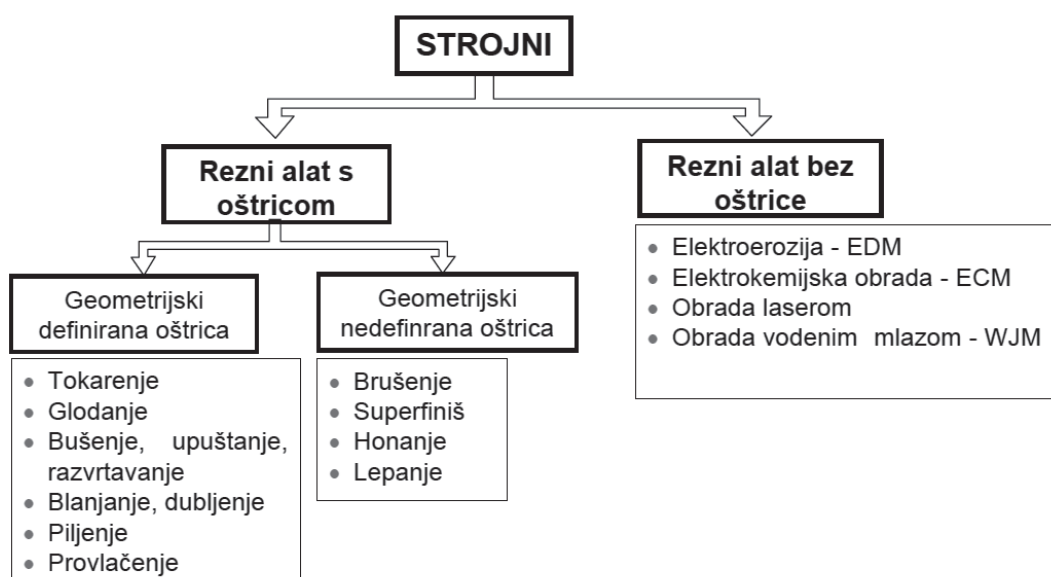
This paper is divided in two parts. In first, theoretical, part criteria, methods and functions of material machinability are explained. Special emphasis is on mathematical modeling of machinability functions which includes design of experiment, selection of mathematical models and regression analysis and result interpretation.

Second part of this paper shows experimental research of influential cutting process factors on the cutting forces. Experimental plans for mathematical models of first and second degree were used. Experimental results were analyzed in software package Statsoft Statistica v10.0.1011 and comparative analysis was conducted for different experimental plans

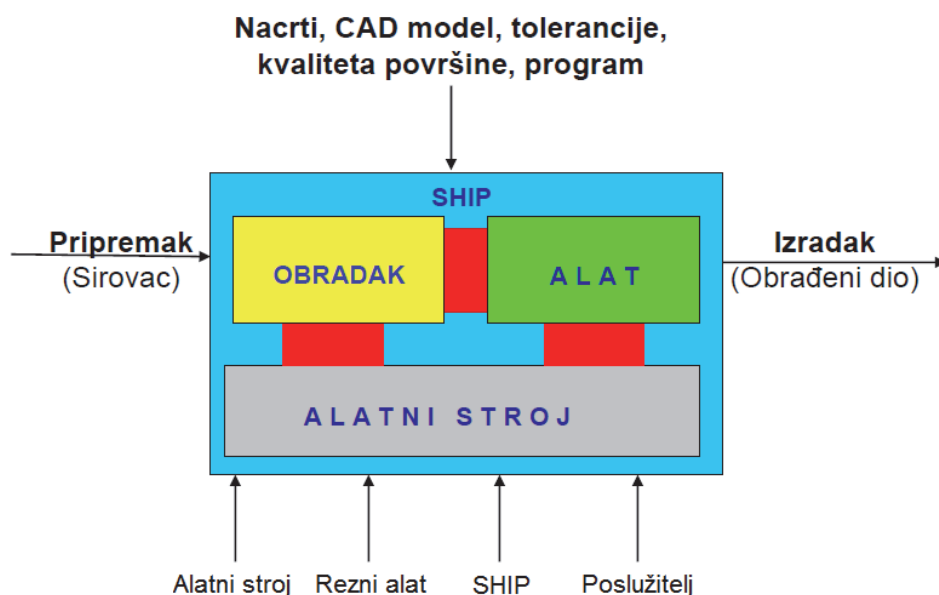
Key words: machinability; experiment plan, mathematical model; regression

## 1. UVOD

Proizvodnja je proces svjesnog i organiziranog djelovanja čovjeka (i društva) koji rezultira dobrima i uslugama, a s ciljem zadovoljavanja ljudskih potreba. Proizvodnja u užem smislu je proces pretvorbe priprema u koristan proizvod, uz primjenu odgovarajućih proizvodnih tehnika. Jedna od najupotrebljavanijih proizvodnih tehnika je obrada odvajanjem čestica koja se dijeli na: [1]



Slika 1.1. Podjela postupaka obrade odvajanjem čestica [1]



Slika 1.2. Obrada odvajanjem čestica kao sustav [1]

Obrada odvajanjem čestica kao sustav sastoji se od alatnog stroja, obratka, alata, sučelja obradak-alatni stroj i sučelja alat-alatni stroj. Proces rezanja definiran je sučeljem alata i obratka uz sredstva za hlađenje i podmazivanje. Prije same obrade imamo pripremak koji se na kraju procesa definira kao izradak. [1]

Prednosti obrade odvajanjem: [1]

- Jedini način da se ostvari visoka preciznost i visoka kvaliteta obrađene površine
- Jedini način formiranja oštarih rubova, ravnih površina, te unutarnjih i vanjskih profila
- Jedini način oblikovanja otvrdnutih i krutih materijala
- Ekonomičnost (za male serije, tj. prototipove)
- Presudna je kod formiranja složenih oblika s zahtjevnom dimenzijskom točnošću i površinskom hrapavošću

Nedostaci obrade odvajanjem čestica: [1]

- Generira velike količine odvojenih čestica
- Više vremena se troši za obradu nego za formiranje površina
- U slučaju lošeg projektiranja obrade odvajanjem može doći do narušavanja svojstava obratka i obrađene površine

Kod obrade odvajanjem čestica velika pažnja posvećuje se pravilnom odabiru parametara obrade jer se želi postići što bolje iskorištenje strojeva i alata što u konačnici rezultira smanjenjem troškova obrade i povećanjem profita. Da bi mogli odrediti parametre obrade moramo dobro poznavati svojstva obradivosti materijala .

## 2. OSNOVE OBRADIVOSTI ODVAJANJEM ČESTICA

### 2.1. Definicija obradivosti materijala

Ne postoji univerzalna definicija obradivosti materijala. Postoji toliko definicija obradivosti materijala koliko i testova kojima se ona određuje. Tako postoje testovi koji se baziraju na silama rezanja, na utrošenoj energiji prilikom obrade, na kvaliteti obrađene površine, postojanosti alata itd. [2]

Obradivost se teško definira iz razloga što je određena s mnogo utjecajnih faktora, a ogleda se kao rezultat različitih djelovanja sljedećih faktora procesa rezanja: [3]

- Materijal i geometrija alata
- Materijal i geometrija obratka i
- Sredstva za hlađenje ispiranje i podmazivanje (SHIP)

i to u međusobnom odnosu s parametrima obrade.

Najčešće navedene definicije obradivosti u literaturi su: [3]

- Obradivost se može uzeti kao mjera poteškoća koje nastaju pri obradi rezanjem određenog materijala
- Obradivost predstavlja lakoću obrađivanja danog materijala obratka
- Obradivost je skup većeg broja osobina materijala obratka koje pokazuju s kakvim se uspjehom može obrađivati određeni materijal
- Obradivost je karakteristika obrađivanog materijala koja pokazuje efekt proizvodnosti i kvalitete proizvoda
- Obradivost je jedan od osnovnih pokazatelja tehnoložnosti materijala, a odlikuje se nizom parametara koji određuju proizvodnost proces rezanja i kvalitetu obrađene površine obratka
- Obradivost materijala nije jedinstvena unutrašnja osobina materijala i može se samo djelomično izraziti preko sljedeća tri odvojena aspekta:
  1. s aspekta alata – izražava se preko odnosa količine skinutog materijala i postojanosti alata,
  2. s aspekta stroja – izražava se silama rezanja
  3. s aspekta kvalitete obrađene površine

Moguća najprikladnija definicija obradivosti bi bila ona po kojoj je najbolje obradiv materijal onaj koji dozvoljava najbrže odnošenje najveće količine materijala sa zadovoljavajućom kvalitetom obrađene površine. [3]

Poštujući sve do sada navedene definicije u literaturi može se zaključiti da je obradivost materijala osnovna tehnološka karakteristika kojom se izražava podobnost obrade nekog materijala, a ocjenjuje se skupom kriterija ili funkcija obradivosti " $F_0$ ", koristeći se pri tome skupom metoda za ispitivanje obradivosti. [4]

## 2.2. Kriteriji, metode i funkcije obradivosti

### 2.2.1. Kriteriji obradivosti

Obradivost različitih materijala opisuje se s četiri osnovna kriterija: [3][4]

1. Postojanost alata
2. Sile rezanja
3. Kvaliteta obrađene površine
4. Oblik odvojene čestice

#### 2.2.1.1. Postojanost alata

S pogleda postojanosti alata kao kriterija obradivosti materijala, materijali koji se mogu lako obrađivati bez pretjeranog trošenja alata smatraju se lako obradivim materijalima i njihova obradivost je veća od obradivosti materijala koji uzrokuju veće trošenje alata prilikom svoje obrade. [2]

Kod upotrebe postojanosti alata kao kriterija obradivosti materijala pojavljuje se jedan problem. Indeks obradivosti dobiven prilikom obrade materijala pomoću alata izrađenog od jednog materijala (npr. brzorezni čelik) ne može se upotrijebiti kao odgovarajući prilikom obrade materijala pomoću reznog alata izrađenog od nekog drugog materijala (npr. prevučeni tvrdi metal) iz razloga što prevučeni tvrdi metal ima veću otpornost prema trošenju od brzoreznog čelika. [2]

Postojanost alata predstavlja vrijeme efikasnog rada alata. Ova definicija se može smatrati direktnom izvedenom definicijom iz Taylor-ovog modela mjerenja postojanosti alata koji je postojanost alata izražavao kroz vrijeme koje je alat proveo u radu. Taylor je otkrio da vrijeme koje alat provede u radu ovisi o brzini rezanja i da se ta ovisnost može prikazati preko sljedeće jednadžbe: [2]

$$v_c \cdot T^m = C_T \quad (2.1)$$

### 2.2.1.2. Sile rezanja

Dva su razloga zašto se kao kriterij obradivosti koriste sile rezanja. Prvi proizlazi iz definicije obradivosti koja glasi da je obradivost lakoća obrade nekog materijala što implicira da materijal kroz koji alat lakše prodire ima bolju obradivost. Drugi razlog je povezan s cijenom obrade nekog materijala. Pošto su sile rezanja direktno povezane sa snagom, a samim tim i potrošnjom energije, bolje obradivim materijalom smatra se onaj za čiju obradu se potroši manje energije. Iako se kao kriterij obradivosti može uzeti i posmična sila rezanja najčešće se uzima glavna sila rezanja jer ona omogućava rezanje materijala i samim tim određuje potrošnju energije. [1]

Dio obrade odvajanjem koji istražuje utjecaj uvjeta obrade (ulazne veličine procesa) na tijek i način nastajanja odvojene čestice te sile, naprezanja, deformacije i sve druge izlazne veličine procesa koje se pri tome javljaju naziva se teorija rezanja ili mehanika rezanja [1].

Poznavanje sila rezanja je esencijalno zbog sljedećih razloga:

- pravilne konstrukcije reznih alata
- izbora adekvatnog stezanja alata i obratka
- proračuna potrebne snage stroja
- izbora uvjeta (parametara) rezanja da bi se izbjegla pretjerana distorzija obratka koja dovodi do netočnosti (tolerancije)
- optimiranja
- nadzora obradnog procesa [6]

Sile rezanja su ili mjerene u realnom procesu obrade ili predviđene u toku projektiranja procesa obrade. Naprednija rješenja za određivanje sila rezanja temelje se na analitičkom ili numeričkom modeliranju obrade metala. Zbog složenosti procesa obrade, modeliranje se tipično ograničava na ortogonalno rezanje iako rješenja za trodimenzionalno rezanje također postoje u literaturi [6]. Problem određivanja sila rezanja, kada su poznati uvjeti rezanja, svodi se na određivanje odnosa između kuta smične ravnine  $\phi$ , prednjeg kuta  $\gamma$  i koeficijenta trenja. [9]

Na iznos sile rezanja primarno utječu sljedeći parametri:

- parametri obrade (brzina rezanja  $v$ , posmak  $f$ , dubina obrade)
- geometrija alata
- svojstva materijala

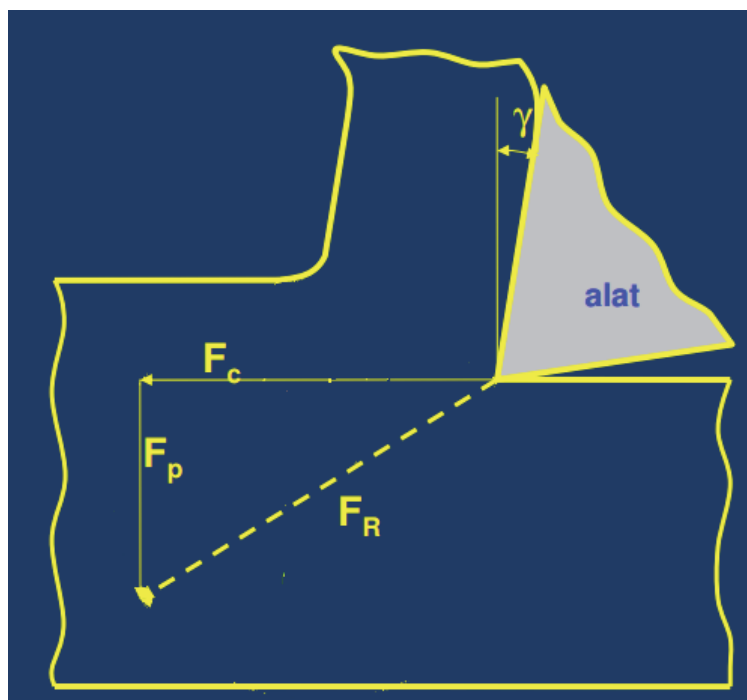
Najjednostavniji način na koji se mogu kontrolirati sile rezanja je promjenom parametara obrade. [6]

### Ortogonalno rezanje

Osnovne pretpostavke (preduvjeti) ortogonalnog rezanja su sljedeće:

- brzina rezanja okomita je na glavnu oštricu i na posmičnu brzinu rezanja
- glavna oštrica šira je od širine obrade
- nema trenja na stražnjoj površini alata
- smicanje se događa u ravni
- raspodjela naprezanja je jednolika [1]

U slučaju ortogonalnog rezanja, ukupna sila rezanja  $F_R$  uobičajeno se rastavlja na dvije komponente, horizontalnu i vertikalnu. Rastavljanje sile rezanja  $F_R$  kod ortogonalnog rezanja na komponente prikazano je na slici 2.1.

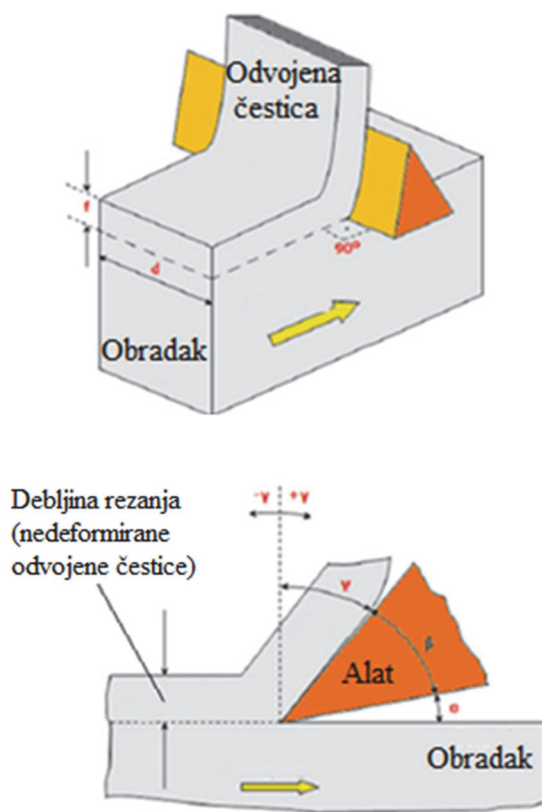


Slika 2.1. Sile rezanja kod ortogonalnog rezanja [1]

Rezultanta sile rezanja  $F_R$  rastavlja se na glavnu silu  $F_C$  i na pasivnu silu  $F_{p(f)}$  ili posmičnu silu. Glavna sila rezanja je sila u smjeru glavnog gibanja. Glavna sila rezanja čini

70~80 % rezultatne sile rezanja i koristi se izračunavanje potrebne snage  $P$  za izvođenje operacija obrade. [6]

Kod procesa obrade rezanjem, tok odvojene čestice u teoriji može se opisati na zajednički način preko dvije različite sheme rezanja. To su ortogonalno rezanje i koso rezanje. Oštrica reznog alata kod ortogonalnog rezanja okomita je na smjer glavnog gibanja te na stranicu obratka. Kao posljedica relativnog gibanja reznog alata i obratka, uklonjen je sloj materijala u obliku odvojene čestice. Suma prednjeg kuta  $\gamma$ , kuta klina  $\beta$  i stražnjeg kuta  $\alpha$  iznosi  $90^\circ$ , kao što je vidljivo na slici 2.2.



Slika 2.2. Ortogonalno rezanje [9]

Na slici 2.2 prikazan je pozitivni prednji kut oštrice reznog alata. U slučaju negativnog kuta  $\gamma$ , kut klina  $\beta$  poprima veću vrijednost. Pozitivni prednji kut koristi se kod obrade duktilnih materijala jer će u tom slučaju "slabiji" rezni alat (manji kut klina) biti dostatan za obavljanje operacije rezanja. Za obradu materijala visoke čvrstoće odabiru se rezni alati s negativnim prednjim kutom (veći kut klina) jer takvi rezni alati imaju izdržljiviju oštricu.



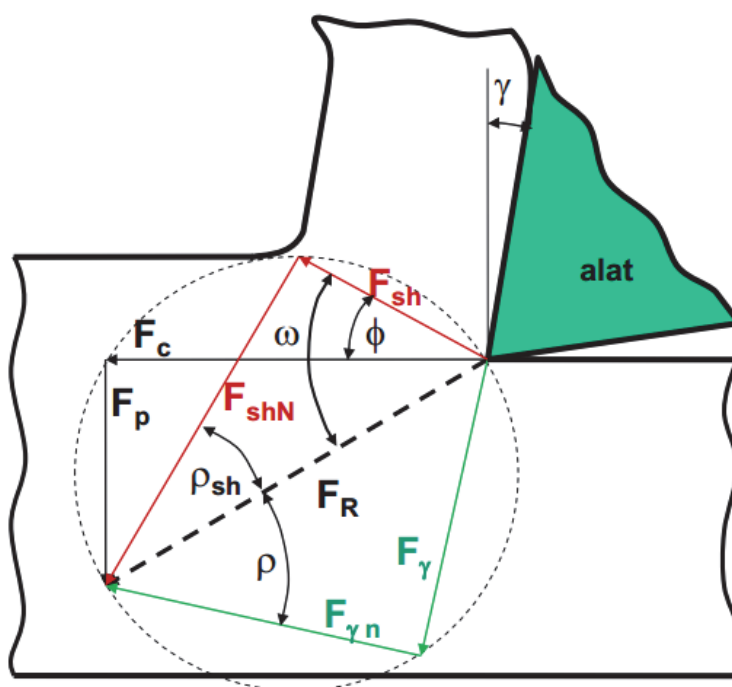
Rezni alati s negativnim prednjim kutom imaju i svoje nedostatke, a to su veća potrošnja snage te potreba za većom robustnošću da bi se kompenzirale vibracije. Stražnja površina reznog alata ne sudjeluje u procesu nastanka odvojene čestice već osigurava da rezni alat nije u kontaktu s obrađenom površinom i da ne utječe na kvalitetu obrađene površine. Stražnji kut  $\alpha$  utječe na trošenje reznog alata. Ako je stražnji kut preveliki, oslabit će kut klina reznog alata. Ako pak je stražnji kut premalen, stražnja površina reznog alata doći će u kontakt s obrađenom površinom. Ortogonalno rezanje predstavlja dvodimenzionalan mehanički problem bez kosog uvijanja odvojene čestice. Reprezentativno je samo za mali fragment procesa obrade, ali ipak se široko koristi u teoretskom i eksperimentalnom radu zbog svoje jednostavnosti. Zbog dvodimenzionalne naravi ortogonalnog rezanja, mnoge nezavisne varijable mogu se eliminirati. [9]

### **Kut smične ravnine po Merchantu**

Hipoteza Merchantovog modela glasi da u uvjetima kada nema vanjskih ograničenja (jedna od pretpostavki ortogonalnog rezanja), smična ravnina će se postaviti tako da sila potrebna za smicanje bude najmanja. Merchantov model koristi pretpostavku da se radi o ortogonalnom rezanju gdje postoje samo dvije komponente sila rezanja. Ostale pretpostavke na kojima je zasnovan Merchantov model stvaranja odvojene čestice su:

- a) vrh alata je apsolutno oštar, pri čemu nema klizanja između alata i obratka,
- b) deformacija metala se odvija u ravnini, nema bočnog klizanja,
- c) naprezanja u ravnini smicanja su ravnomjerno raspoređena. [1]

U Merchantovoj kružnici, prikazanoj na slici 2.3, resultantna sila  $F_R$  rastavljena je na komponente  $F_{\gamma N}$  i  $F_\gamma$ .  $F_{\gamma N}$  je normala na prednju površinu alata, a  $F_\gamma$  je paralelna s prednjom površinom. Također, sila  $F_R$  rastavlja se na  $F_{ShN}$ , koja je okomita na smičnu ravninu, te  $F_{Sh}$  koja je paralelna sa smičnom ravninom. Resultantna sila  $F_R$  može se rastaviti i na glavnu silu rezanja  $F_c$  te natražnu silu  $F_p$ . [1]



Slika 2.3. Merchantova kružnica [1]

$F_c$  – glavna sila rezanja

$F_p$  – pasivna ili natražna sila rezanja

$F_\gamma$  – tangencijalna sila na prednjoj površini alata

$F_{\gamma N}$  – normalna sila na prednjoj površini alata

$F_{sh}$  – tangencijalna sila u ravnini smicanja

$F_{shN}$  – normalna sila u ravnini smicanja

Kut trenja  $\rho$  povezan je s koeficijentom trenja na prednjoj površini alata  $\mu$  preko jednadžbe (2.2):

$$\rho = \arctan(\mu) = \arctan(F_\gamma/F_{\gamma N}) \quad (2.2)$$

Iz slike 2.3 je vidljivo da je:

$$F_{sh} = F_R \cos \omega \quad (2.3)$$

Kut između sila  $F_R$  i  $F_{sh}$  može se izraziti preko kuta smične ravnine, kuta trenja i prednjeg kuta reznog alata.

$$\omega = \phi + (\rho - \gamma) \quad (2.4)$$

Smična naprezanja u ravnini smicanja računaju se prema jednadžbi (2.5):

$$\tau_s = \frac{F_{sh}}{A_{sh}} \quad (2.5)$$

Površina presjeka u ravnini smicanja računa se prema izrazu:

$$A_{sh} = \frac{a_p b}{\sin \phi} = \frac{A}{\sin \phi} \quad (2.6)$$

Ukoliko se jednačbe (2.3) i (2.6) uvrste u jednačbu (2.5), dobiva se jednačba (2.7) za smično naprezanje u ravnini smicanja.

$$\tau_s = \frac{F_R \cos[\phi + (\rho - \gamma)]}{\frac{A}{\sin \phi}} = \frac{F_R}{A} \cdot \cos[\phi + (\rho - \gamma)] \cdot \sin \phi \quad (2.7)$$

Deriviranjem jednačbe (2.7) po kutu smične ravnine dobiva se jednačba (2.8):

$$\frac{d\tau_{sh}}{d\phi} = \frac{F_R}{A} \cdot \{-\sin[\phi + (\rho - \gamma)] \cdot \sin \phi + \cos[\phi + (\rho - \gamma)] \cdot \cos \phi\} \quad (2.8)$$

$$\frac{d\tau_{sh}}{d\phi} = \frac{F_R}{A} \cdot \cos[\phi + (\rho - \gamma) + \phi] = \frac{F_R}{A} \cdot \cos[2\phi + (\rho - \gamma)] \quad (2.9)$$

Ukoliko se prva derivacija iz jednačbe (2.9) izjednači s nulom, dobije se jednačba za kut smične ravnine pri kojem je potrebna sila za smicanje najmanja.

$$\frac{d\tau_{sh}}{d\phi} = 0 \quad \dots\dots \quad \frac{F_R}{A} \cos[2\phi + (\rho - \gamma)] = 0 \quad (2.10)$$

$$\cos[2\phi + (\rho - \gamma)] = 0 \quad \dots\dots \quad 2\phi + \rho - \gamma = \frac{\pi}{2} \quad (2.11)$$

Iz jednačbe (2.11) slijedi konačno rješenje za kut smične ravnine pri kojem je sila minimalna:

$$\phi = \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} - \frac{\rho}{2} \quad (2.12)$$

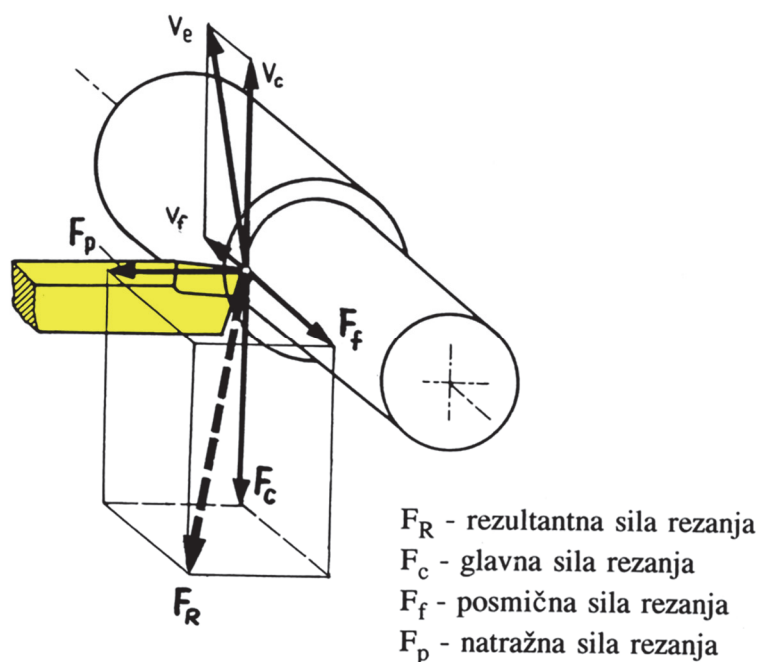
U jednačbi (2.12) za računanje kuta smične ravnine pri kojem je potrebna smična sila najmanja, prvi dio izraza  $(\pi/4 + \gamma/2)$  predstavlja simetralu između prednje površine alata i pravca relativnog gibanja. Član  $\rho/2$  u jednačbi (2.12) pokazuje u kojoj mjeri dinamičke pojave utječu na promjenu, smanjenje optimalne vrijednosti kuta ravnine smicanja. Budući da je riječ o kutu trenja (u Merchantovim razmatranjima se pojave na prednjoj površini alata objašnjavaju isključivo trenjem) na prednjoj površini alata, jasno je da je smanjenje optimalne vrijednosti kuta ravnine smicanja posljedica pojava na prednjoj površini alata. Smanjenje kuta ravnine smicanja je negativna pojava jer se povećava presjek smicanja ( $A_{sh}$ ), a s time i sila potrebna da se ostvari smicanje materijala, odnosno formiranje odvojene čestice. Za koliko kut trenja smanjuje kut smične ravnine, najlakše je utvrditi ako se uzme realni slučaj da je kut  $\gamma$  jednak nuli. Uz takvu geometriju alata tangencijalna sila na prednjoj površini alata jednaka

je pasivnoj sili ( $F_\gamma = F_P$ ), a normalna sila na prednjoj površini alata jednaka je glavnoj sili rezanja ( $F_{\gamma N} = F_c$ ). Kut trenja računa se prema formuli  $\rho = \arctg F_\gamma / F_{\gamma N}$ , tj. pri  $\gamma = 0^\circ$  kut trenja iznosi  $\rho = \arctg F_P / F_c$ . Ako se pretpostavi da je glavna sila rezanja nekoliko puta veća od pasivne sile, može se zaključiti da je red veličina kuta trenja  $10-16^\circ$ , odnosno da trenje na prednjoj površini alata smanjuje optimalnu vrijednost kuta ravnine smicanja za  $5-8^\circ$ . [1]

Prikazani izrazi vezani za formiranje odvojene čestice zasnivaju se na modelu koji formiranje čestice objašnjava smicanjem u jednoj smičnoj ravnini. Pošto se rezultati raznih eksperimenata nisu baš podudarali s modelskim vrijednostima, razvijen je i niz drugačijih pristupa. Međutim, pristup s jednom smičnom ravninom je svakako najčešći i najjednostavniji. [1]

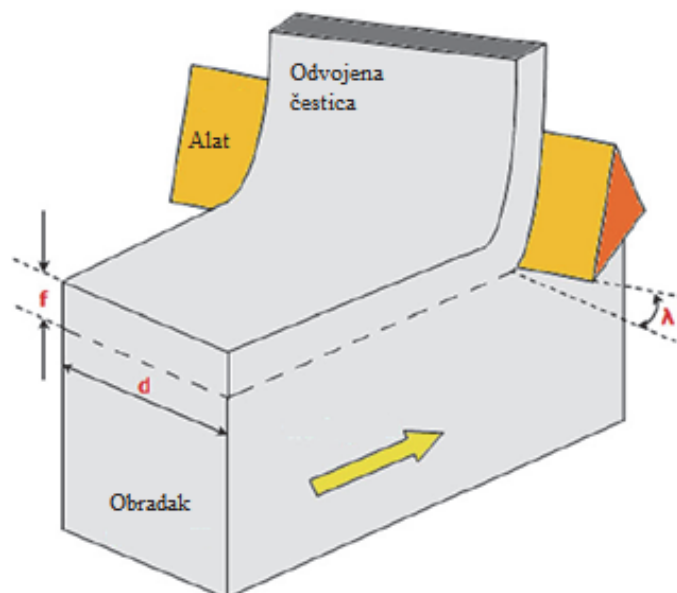
### Koso rezanje

U slučaju trodimenzionalnog kosog rezanja, s trećom osi pojavljuje se i još jedna komponenta koja čini rezultatnu silu rezanja. Pasivna (posmična) sila koja se javlja kod ortogonalnog rezanja, u slučaju kosog rezanja se dalje rastavlja na dvije komponente. Jedna komponenta je u smjeru posmičnog gibanja i naziva se posmična sila  $F_f$ , dok je druga komponenta okomita na posmičnu silu  $F_f$  i glavnu silu rezanja  $F_c$  te se naziva natražna (pasivna) sila rezanja  $F_p$ . [6]



Slika 2.4. Komponente sile rezanja kod kosog rezanja [1]

Za razliku od ortogonalnog rezanja, koso rezanje reprezentativno je za rješavanje trodimenzionalnih problema. Koso rezanje prikazuje realističniji tok odvojene čestice, ali zahtijeva i složeniju analizu (razmatraju se tri komponente sile i uvijanje odvojene čestice se uzima u obzir). Koso rezanje prikazano je na slici 2.5.



Slika 2.5. Koso rezanje [9]

U slučaju kosog rezanja razmatraju se tri sile rezanja, a to su glavna sila rezanja  $F_C$ , posmična sila  $F_f$  i natražna sila  $F_p$ . Glavna sila rezanja obično je najveća, a natražna najmanja. Mjerenja ili teoretska računanja sile rezanja bila su predmet mnogih istraživanja. Takva istraživanja su vrlo važna zbog toga što se iz njih dobivaju spoznaje o silama rezanja, a na temelju rezultata se procjenjuje potrebna snaga alatnog stroja, svojstva reznog alata te kvaliteta obratka. Na primjer, ukoliko je natražna sila velika, a držač alata nije dovoljno krut, oštrica će biti odgurnuta od obrađivane površine što će uzrokovati nedostatak dimenzijske točnosti. Nadalje, određivanje sile rezanja vodi do izračuna nekih drugih parametara, kao što su npr. naprezanja. [9]

### **Utjecajni faktori na sile rezanja**

Utjecajne veličine na sile rezanja su:

- tvrdoća i žilavost materijala obratka

- oblik reznog dijela alata
- veličina i oblik presjeka odvojene čestice
- brzina odvajanja čestica i ostali parametri procesa obrade
- hlađenje i podmazivanje [5]

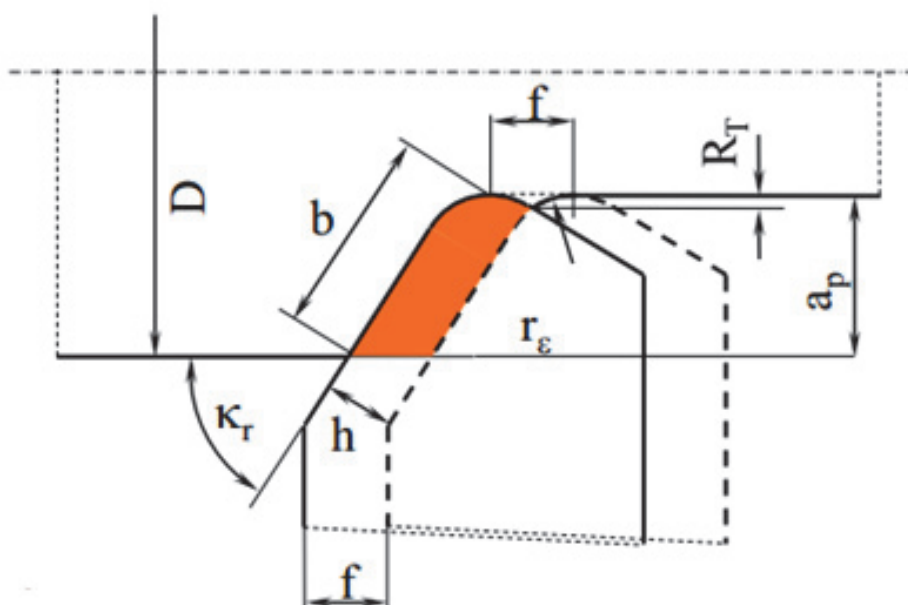
Sile rezanja variraju u velikoj mjeri ovisno o fizičkim i mehaničkim svojstvima obrađivanog materijala. Tangencijalna sila može se odrediti množenjem površine poprečnog presjeka odvojene čestice sa specifičnim otporom rezanja ovisnim o materijalu obratka. Taj otpor rezanju smanjuje se povećanjem debljine odvojene čestice i povećava se povećanjem vlačne čvrstoće i tvrdoće obrađivanog materijala [8]. Sile rezanja povećavaju se povećanjem čvrstoće, ali njihovo povećanje nije proporcionalno povećanju čvrstoće. Uzrok te pojave je u tome da se pri povećanju tvrdoće materijala smanjuje njegova plastičnost i zato je sabijanje manje. Faktor sabijanja smanjuje se kada se povećava kut prednje površine reznog alata, ali različito za različite materijale. Također, toplinska obrada čelika jako utječe na sile rezanja. Toplinskom obradom mijenja se čvrstoća materijala, a time i sile rezanja. [5]

### **Metode procjene sile rezanja**

Jedna od metoda za procjenu sile rezanja je Kienzleova jednačica. Kao što je prije prikazano, bilo da se radi o glodanju ili tokarenju sile rezanja definirane su sljedećim parametrima. Parametri koji imaju najveći utjecaj na sile rezanja su materijal obratka, posmak, debljina i širina odvojene čestice, dubina rezanja, brzina rezanja i napadni kut. Glavna sila rezanja  $F_c$  jednaka je umnošku specifične sile rezanja  $k_c$  i poprečnog presjeka rezanja  $A$ .

$$F_c = k_c A = k_c a_p f = k_c b h \quad (2.13)$$

Poprečni presjek rezanja prikazan je na slici 2.6.



Slika 2.6. Poprečni presjek rezanja [1]

Zbog ovisnosti poprečnog presjeka rezanja o napadnom kutu  $\kappa_r$ , parametri rezanja  $a_p$  i  $f$  modificiraju se u širinu odvojene čestice  $b$  i debljinu odvojene čestice  $h$ . Prema Kienzleovoj pojednostavljenoj pretpostavki, specifična sila rezanja  $k_c$  ovisi o materijalima u procesu rezanja i debljini rezanja  $h$ . Kienzle je formulirao taj odnos preko jednadžbe 2.14.

$$k_c = k_{c1x1} h^{-m} \quad (2.14)$$

Specifična sila rezanja  $k_{c1x1}$  ukazuje na silu rezanja pri širini odvojene čestice  $b=1$  i debljini odvojene čestice  $h=1$  dok eksponent  $m$  indicira logaritamski nagib specifične sile rezanja. Kao rezultat dobiva se Kienzleova jednadžba:

$$F_c = k_{c1x1} b h^{1-m} \quad (2.15)$$

gdje je:

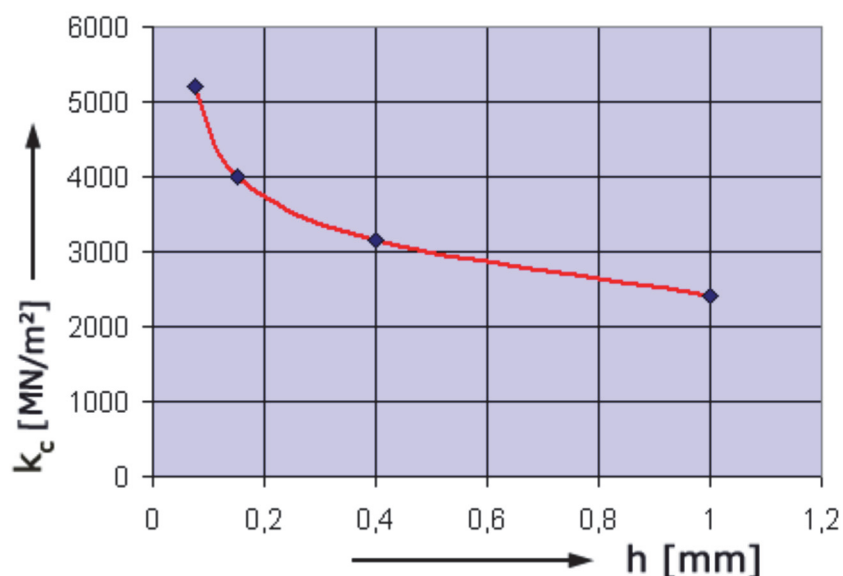
$b$  – širina rezanja;  $b = a_p / \sin \kappa_r$

$h$  – debljina rezanja;  $h = f \sin \kappa_r$

$1-m$  – eksponent ovisan o materijalu obratka

$K_{c1x1}$  - specifična jedinična sila rezanja kod presjeka rezanja  $A = 1 \text{ mm}^2$  [10]

Kao što je prije spomenuto, specifična sila rezanja  $k_c$  ovisi o debljini rezanja  $h$ . Ovisnost  $k_c$  o  $h$  prikazana je na donjoj slici. Iz slike 2.7 je vidljivo da vrijednost specifične sile rezanja nije konstantna već se ona mijenja s uvjetima obrade. [4]



Slika 2.7. Ovisnost specifične sile  $k_c$  o debljini odvojene čestice  $h$  [4]

#### 2.2.1.3. Kvaliteta obrađene površine

Kvaliteta obrađene površine određuje se nizom geometrijskih, fizičko-mehaničkih i kemijskih pokazatelja koji se mogu uspoređivati kod određivanja obradivosti nekog materijala. [25]

Jedna od karakteristika površine kojom se ocjenjuje njena kvaliteta nakon obrade naziva se hrapavost. Nijedan proces obrade odvajanjem čestica ne ostavlja idealno glatku površinu nego uslijed kontakta, relativnog kretanja i međusobnog opterećenja alata i obratka u toku procesa rezanja, nastaje hrapava površina geometrijski definirana neravninama. [3]

#### 2.2.1.4. Oblik odvojene čestice

Obradivost materijala može se definirati i prema tome kako se odvodi odvojena čestica prilikom obrade tj. prema tome dali se prilikom obrade stvara isprekidana odvojena čestica ili dolazi do stvaranja kontinuirane odvojene čestice koja se teško odvodi iz zone rezanja. Kod upotrebe oblika odvojene čestice kao kriterija obradivosti najveći indeks obradivosti dobiti će onaj materijal kod kojeg, prilikom obrade, nastaje isprekidana odvojena čestica. [2]

Pošto oblik odvojene čestice ne ovisi samo o materijalu obradka nego je funkcija i drugih parametara kao što su geometrija alata, parametri obrade itd. indeks obradivosti dobiven na ovaj način može se povećati ili smanjiti promjenom tih parametara. [2]



### 2.2.2. Metode i funkcije obradivosti

Skup metoda za istraživanje obradivosti može se svrstati u dvije osnovne grupe: [11]

- A. Indeksne (komparativne) metode ili metode relativne obradivosti, kojima je osnovni cilj dobivanje indeksa (koeficijenta) obradivosti, a kojim se uspoređuju isti kriteriji obradivosti dva različita materijala
- B. Kompleksne metode kojima je osnovni cilj dobivanje funkcija obradivosti.

#### A. Indeksne (komparativne) metode

Osnovna karakteristika komparativnih metoda za istraživanje obradivosti je relativno ocjenjivanje obradivosti ispitivanog materijala u odnosu na usvojeni, referentni, materijal. Za referentni materijal se najčešće odabire materijal s dobrom obradivosti za promatrani kriterij obradivosti. [11] Indeks ili koeficijent obradivosti je veličina definirana izrazom: [4]

$$I_0 = \frac{K_{oIM}}{K_{oEM}} \quad (2.16)$$

Za etalon materijal koristi se konstrukcijski materijal koji se često koristi u tehnološkoj proizvodnoj praksi. [4]

Značaj rezultata komparativnog ispitivanja obradivosti je dvojak: [11]

1. Ovom metodom i rezultatima kontrolira se nivo i kvaliteta danog materijala u toku ili poslije njegove proizvodnje, a prije procesa obrade
2. Na osnovi dobivene vrijednosti  $I_0$  za neki materijal može se utvrditi optimalni režimi obrade u datim operacijama tehnološkog procesa. Tako npr. kada se poznaje vrijedost ekonamične brzine rezanja  $v_{01}$  i vrijednost indeks obradivosti  $I_{01}$  jednog materijala, tada se vrijednost ekonamične brzine rezanja  $v_{02}$  drugog materijala (pošto znamo  $I_{02}$ ) dobije iz jednadžbe:

$$v_{02} = \frac{I_{02}}{I_{01}} v_{01} \quad (2.17)$$

Za dobivanje indeksa obradivosti koriste se sljedeće metode: [3][4][11]

- Metoda varijabilnih brzina rezanja
- Metoda konstantnog puta rezanja
- Metoda konstantnih sila rezanja

- Metoda radioaktivnih izotopa
- Metoda poprečne obrade
- Indirektne metode
- Metoda ispitivanja oblika odvojenih čestica

## B. Kompleksne metode istraživanja obradivosti

Svrha kompleksnih metoda je dobivanje matematičkih modela procesa obrade odnosno dobivanje funkcija obradivosti. Funkcije obradivosti su matematički modeli kojima se opisuje uzajamna ovisnost ulaznih i izlaznih parametara procesa obrade i predstavljaju aproksimaciju stvarnog oblik funkcije procesa. [1]

### 2.3. Matematičko modeliranje funkcija obradivosti

#### 2.3.1. Funkcije obradivosti

Funkcije obradivosti upotrebljavaju se u svrhu: [12]

- spoznaje fizikalnih zakona obradnog procesa,
- definiranja i optimiranja procesa obrade,
- predviđanja intenziteta utjecaja pojedinih utjecajnih faktora u fazi projektiranja i simuliranja procesa obrade,
- sigurnog vođenja i nadzora procesa obrade.

Skup osnovnih funkcija obradivosti u obradi odvajanjem čestica čine: [12]

- funkcija postojanosti alata,  $T=T(x_i)$
- funkcija sile rezanja,  $F=F(x_i)$
- funkcija kvalitete obrađene površine,  $R=R(x_i)$
- funkcija oblika odvojene čestice,  $O_c=O_c(x_i)$

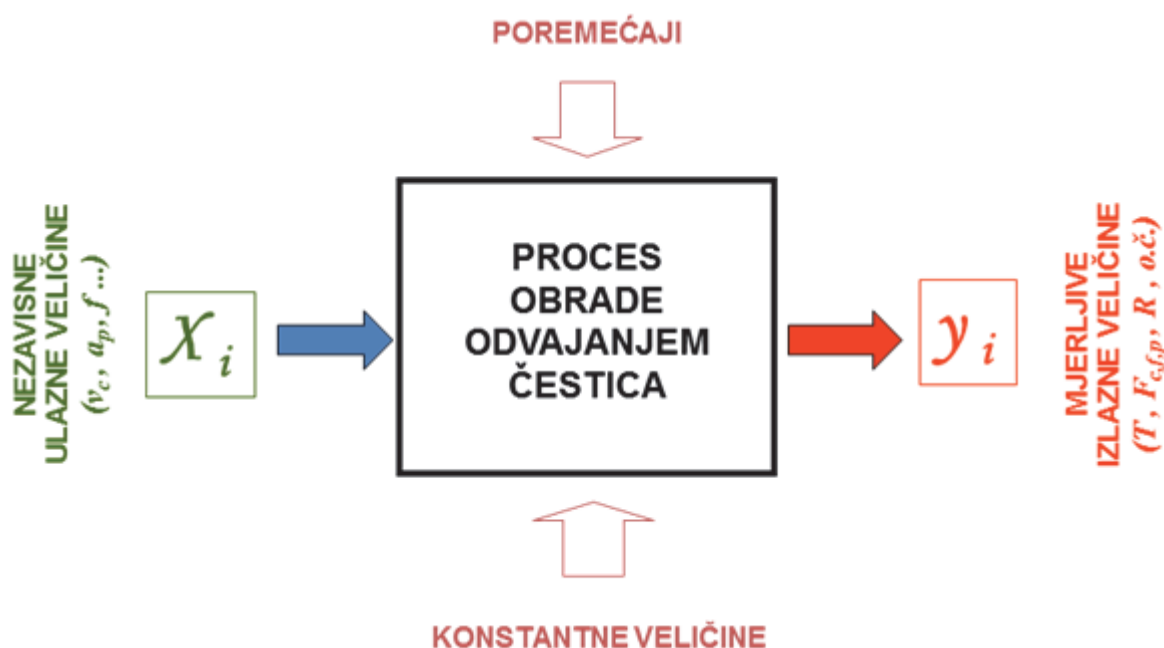
Gdje su  $x_i$  - parametri i uvjeti obrade.

Iako su u navedenim funkcijama obuhvaćeni svi bitni faktori procesa obrade odvajanjem čestica, ipak neki autori proširuju navedeni skup dopunskim funkcijama obradivosti: [12]

- funkcija temperature rezanja,  $\theta = \theta(x_i)$

- funkcija snage rezanja,  $P = P(x_i)$
- funkcija proizvodnosti,  $V = V(x_i)$

Metode za dobivanje funkcija obradivosti su različiti eksperimentalni statistički višefaktorski planovi. Krajnji rezultat su matematički modeli kojima se opisuje uzajamna ovisnost ulaznih i izlaznih parametara procesa obrade i koji predstavljaju aproksimaciju stvarnog, nepoznatog, analitičkog oblika funkcije procesa. [12]



Slika 2.8. Shematski prikaz procesa obrade odvajanjem čestica [12]

### 2.3.2. Plan pokusa

Plan pokusa predstavlja način definiranja protokola za iznalaženje funkcionalnih ovisnosti između ulaza i izlaza procesa prikazanog na slici 2.8.

Planove pokusa možemo podijeliti u dvije grupe: [12]

1. Jednofaktorski planovi pokusa
2. Višefaktorski planovi pokusa

U procesu obrade odvajanjem čestica koristimo višefaktorske planove pokusa zbog toga što sam proces obrade odvajanjem čestica ima statistički karakter i označen je mnogobrojnim utjecajnim faktorima, koji djeluju direktno, međusobno i po jačini različito na

tijek i ishod pokusa. Višefaktorski plan pokusa, u odnosu na jednofaktorski, odlikuje se slijedećim značajkama: [12]

- U tijeku eksperimenta varira se više utjecajnih faktora istodobno,
- Poseban raspored eksperimentalnih točaka u prostoru,
- Minimalan broj eksperimentalnih točaka u odnosu na količinu dobivenih informacija o zakonitosti procesa. Posljedica ovoga su višestruko smanjeni troškovi i vrijeme trajanja eksperimentalnih ispitivanja procesa.
- Relativno jednostavna matematička obrada rezultata,
- Daje uvid u ovisnostima među faktorima (interakcije).

Postoji više kriterija za podjelu višefaktorskih planova pokusa, a najvažniji su: broj faktora u planu, broj stupnja plana, cilj plana i drugi. Proizlazeći iz toga višefaktorske planove pokusa dijelimo na: [12]

1) Prema broju faktora na:

- Jednofaktorske planove,
- Dvofaktorske planove,
- Trofaktorske planove
- Višefaktorske planove

2) Prema stupnju modela na:

- Planove prvog stupnja
- Planove drugog stupnja
- Planove višeg stupnja.

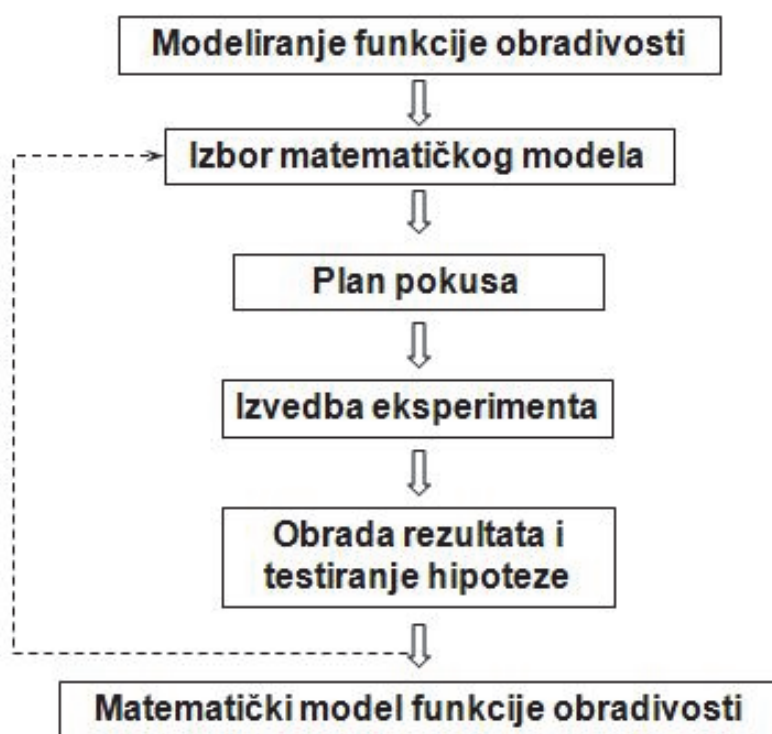
3) Prema cilju koji se postiže planom odnosno eksperimentalnim ispitivanjem na:

- Planovi za selekciju i rangiranje skupa ulaznih faktora,
- Planovi za otkrivanje i proučavanje zakonitosti danih pojava i procesa,
- Planovi za optimizaciju i optimalno upravljanje danim pojavama, procesima, sustavima i sl.

U praksi se, a ponegdje i u literaturi, često pod pojmom plana pokusa kriju dva pojma: [12]

- Plan pokusa u širem smislu i
- Plan pokusa u užem smislu.

Plan pokusa u širem smislu označava eksperimentalno istraživanje za dobivanje funkcija obradivosti, a koje se odvija po točno određenom protokolu, prikazanom blok shemom na slici 2.9. [12]



Slika 2.9. Blok shema protokola eksperimentalnog istraživanja [12]

Kako je vidljivo na shemi, eksperimentalno istraživanje počinje izborom matematičkog modela za kojega se predstavlja da će biti dovoljno točna aproksimacija stvarnog, nepoznatog, analitičkog oblika funkcije odziva. Definirati matematički model ne znači samo odrediti njegov stupanj, već i načiniti izbor nezavisnih utjecajnih parametara koji su u tom trenutku od interesa istraživača i koji ulaze u model. Svi ostali potencijalni faktori moraju biti konstantni. To zapravo označava postavljanje hipoteze. Nakon provedbe eksperimenta i obrade rezultata hipoteza se testira. Međutim ako se dokaže da matematički model ne odgovara stvarnom modelu, postupak započinje ispočetka postavljanjem novog matematičkog modela, ili izborom drugačijeg intervala variranja faktora modela. [12]

Plan pokusa u užem smislu znači odrediti, za definirani matematički model [12]:

- Broj točaka pokusa,
- interval variranja faktora,
- način ponavljanja,
- broj ponavljanja i
- plan matricu pokusa

### 2.3.3. Matematički modeli

Matematički model, ako je adekvatan, predstavlja povoljno točnu aproksimaciju stvarnog, nepoznatog, analitičkog oblika funkcije odziva. Ako su u procesu obrade, čija je stvarna funkcija stanja procesa nepoznata, definirani ulazi ( $x_i, i = 1, 2, 3 \dots k$ ) onda se matematički model procesa može napisati u obliku: [12]

$$\eta = \phi(x_1, x_2, x_3 \dots \dots x_k) \quad (2.18)$$

Funkcija  $\eta$  je hipotetična veličina. U matematičkom modelu koji se dobije nakon eksperimentalnog ispitivanja prisutna je i greška eksperimenta ( $\varepsilon$ ) pa vrijedi sljedeći model: [12]

$$\eta = \phi(x_1, x_2, x_3 \dots \dots x_k) + \varepsilon \quad (2.19)$$

Ako se očekivani odziv označi sa  $E(y) = \eta$  onda se površina prikazana sa  $\eta$  naziva odzivna površina. [12]

Matematički model može biti polinom prvog, drugog ili višeg stupnja. U većini eksperimentalnih istraživanja procesa obrade odvajanjem čestica kao matematički modeli zadovoljavaju modeli prvog stupnja: [12]

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i=1}^k b_{ij} x_i x_j \quad (2.20)$$

Gdje su:  $x_i$  nezavisni utjecajni faktori;  $i = 1, k$ .

Iz praktičnih razloga u obradi odvajanjem čestica često se koristi matematički model zapisan u eksponencijalnom obliku: [12]

$$y = C \prod_{i=1}^k x_i^{p_i} \quad (2.21)$$

Ovaj model pripada u grupu modela polinoma prvoga stupnja jer se jednostavno pretvara u njega matematičkom operacijom logaritmiranja. [12]

U istraživanjima u kojima se očekuje funkcija odziva s ekstremom koriste se matematički modeli kao polinomi drugog stupnja: [12]

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \sum_i \sum_j^k b_{ij} x_i x_j \quad (2.22)$$

$x_i$  = nezavisni utjecajni faktori;  $i = 1, k$ .

#### 2.3.4. Višefaktorski plan pokusa prvog stupnja

Plan pokusa prvog stupnja se koristi pri statističkoj identifikaciji modela prvog stupnja kojim se matematički opisuje cilj istraživanja u jedno, dvo ili višedimenzijalnom prostoru. Planovi prvoga stupnja ne mogu se koristiti za modele drugog ili višeg stupnja, ali su planovi drugog stupnja primjenjivi za proces identifikacije modela prvog stupnja. [12]

Stupanj višefaktorskog plana pokusa direktno je povezan sa stupnjem matematičkog modela, odnosno višefaktorski plan pokusa prvog stupnja primjenjuje se onda kada je za polazni matematički model izabran model prvog stupnja. Istodobno istraživač određuje koje nezavisne ulazne veličine procesa ( $x$ ) proglašava važnim za konkretno istraživanje. U matematičkom modelu se te nezavisne ulazne veličine procesa zovu nezavisni utjecajni faktori ( $x$ ). [12]

Nakon što se definiraju ulazne veličine procesa, odnosno nezavisni utjecajni faktori, potrebno je odrediti razine variranja faktora. Najviše se primjenjuju ortogonalni planovi s variranjem faktora na dvije razine, što se označava: [12]

$$x_{i,min}$$

$$x_{i,max}$$

Planovi čiji se faktori variraju na dvije razine nazivaju se planovi tipa " $2^k$ " gdje je " $k$ " broj faktora, odnosno nezavisnih varijabli. [12]

Slijedeći korak je određivanje u kojoj točki plana i kako će se izvoditi ponavljanje. Najčešće se primjenjuje centralni plan eksperimenta koji podrazumijeva da se ponavljanje eksperimentalnih točaka izvodi samo u centralnoj točki višefaktorskog ortogonalnog plana. Ponavljanje se izvodi kako bi se mogla odrediti greška eksperimenta i testiranje hipoteze. Zbog toga će se morati odrediti i srednje razine faktora prema izrazu: [12]

$$x_{i,sr} = \frac{x_{imin} + x_{imax}}{2} \quad (2.23)$$

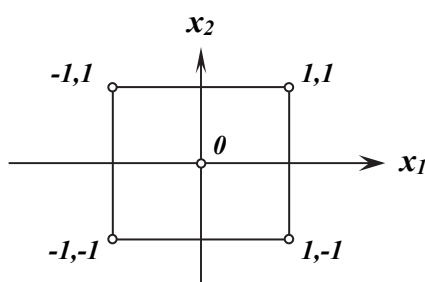
Vrlo često vrijednosti faktora se prikazuju u kodiranom obliku, a iz razloga jednostavnijeg i preglednijeg prikaza. Kodiranje se izvodi na način: [12]

$$\begin{aligned} x_{min} &\rightarrow kod = +1 \\ x_{sr} &\rightarrow kod = 0 \\ x_{max} &\rightarrow kod = -1 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ukupni broj eksperimentalnih točaka (N) računa se prema formuli: [12]

$$N = 2^k + n_0 \quad (2.25)$$

Sve do sada definirane veličine faktora (razine variranja) potrebno je upisati u za to odgovarajuću tablicu. Na kraju planiranja pokusa izrađuje se matrica plana pokusa po kojoj će biti izveden eksperiment. [12]



Slika 2.10. Raspored eksperimentalnih točaka u planu pokusa " $2^2+2$ " [12]

Tablica 2.1. Matrica plan pokusa " $2^2+2$ " [12]

	kod faktora	
	$x_1$	$x_2$
1	-1	-1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	+1	+1
5	0	0
6	0	0



Tablica 2.2. Matrica plana pokusa " $2^k$ " (bez podataka za centar plana) [12]

		kod faktora			
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$2^2$	1	-1	-1	-1	-1
	2	+1	-1	-1	-1
	3	-1	+1	-1	-1
	4	+1	+1	-1	-1
$2^3$	5	-1	-1	+1	-1
	6	+1	-1	+1	-1
	7	-1	+1	+1	-1
	8	+1	+1	+1	-1
$2^4$	9	-1	-1	-1	+1
	10	+1	-1	-1	+1
	11	-1	+1	-1	+1
	12	+1	+1	-1	+1
	13	-1	-1	+1	+1
	14	+1	-1	+1	+1
	15	-1	+1	+1	+1
	16	+1	+1	+1	+1

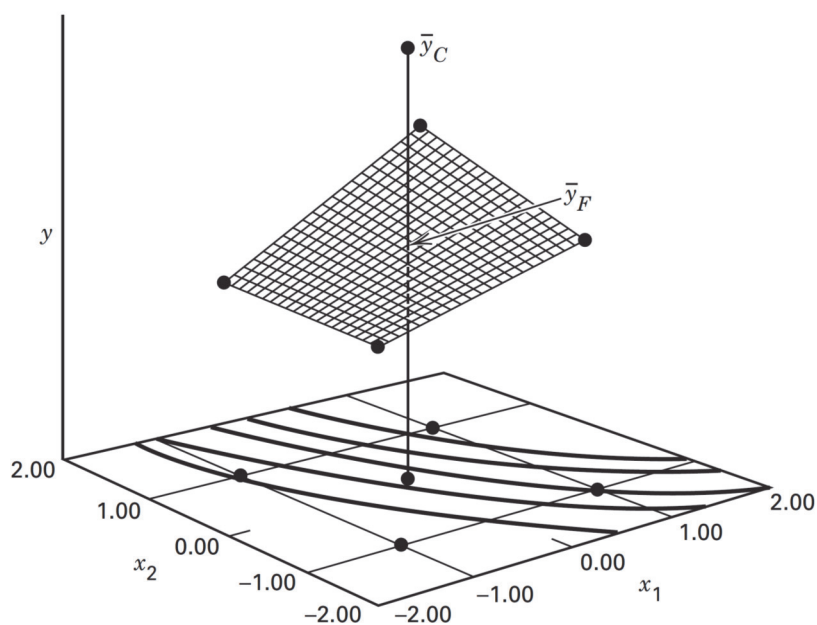
### 2.3.5. Ponavljanje eksperimentalnih točaka pokusa

Jedan od načina ponavljanja eksperimentalnih točaka naziva se replikacija. Replikacija podrazumijeva nezavisno ponavljanje svake kombinacije faktora. Takav način izvođenja omogućava određivanje greške eksperimenta i točniju procjenu parametara, ali znatno povećava potreban broj točaka u planu pokusa (minimalno duplo). [21] Da bi se izbjeglo takvo povećanje broja točaka pokusa postoji metoda dodavanja točaka u centru plana pokusa koja uz ukupno manji broj točaka izvođenja daje i druge informacije što je opisano u nastavku.

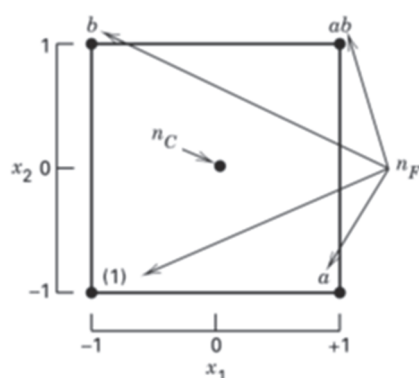
Potencijalni problem prilikom korištenja faktorskog plana pokusa na dvije razine je pretpostavka da je utjecaj faktora linearan. Naravno, savršena linearnost nije potrebna, a plan pokusa  $2^k$  će raditi sasvim dobro čak i kad je pretpostavka linearnosti približna. Iz tog razloga se u modelu prvog stupnja dodaju i interakcije što rezultira modelom koji može prikazati nelinearan odnos (zaobljenost krivulje) među varijablama. [21]

Kod plana pokusa na dvije razine obično polazimo od pretpostavke modela prvog stupnja, ali moramo obratiti pozornost na mogućnost da model drugog stupnja bolje odgovara. Postoji metoda ponavljanja pojedinih točaka u  $2^k$  pokusu koja pruža zaštitu od zaobljenosti zbog utjecaja drugog stupnja te omogućava dobivanje nezavisne procjene greške. Metoda se sastoji od dodavanja točaka u centru za plan pokusa  $2^k$ . To obuhvaća  $n_c$  izvođenja ponavljanja u točkama  $x_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Važan razlog dodavanja izvođenja ponavljanja u centru plana pokusa je to što točke u centru ne utječu na procjene u planu pokusa  $2^k$ . Kada dodajemo točke u centru, pretpostavljamo da su faktori  $k$  kvantitativni.

Slika 2.11 i slika 2.12 prikazuju takav pristup za plan pokusa  $2^k$  sa točkama  $(-, -)$ ,  $(+, -)$ ,  $(-, +)$ ,  $(+, +)$  i  $n_c$  točaka u centru  $(0, 0)$ .  $\bar{y}_F$  predstavlja prosjek četiri točke plana pokusa, a  $\bar{y}_C$  prosjek  $n_c$  izvođenja u centru. [21]



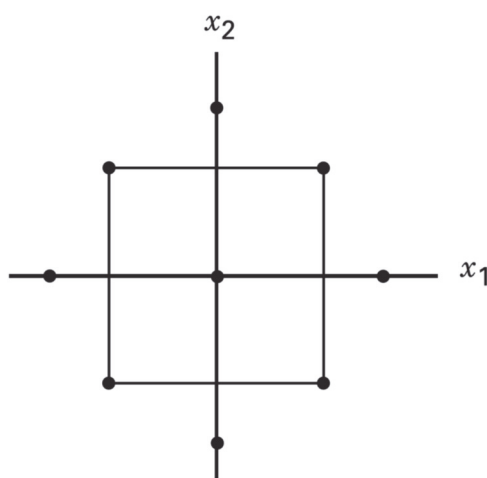
Slika 2.11.  $2^k$  plan pokusa sa točkama u centru [21]



Slika 2.12.  $2^k$  plan pokusa sa točkama u centru [21]

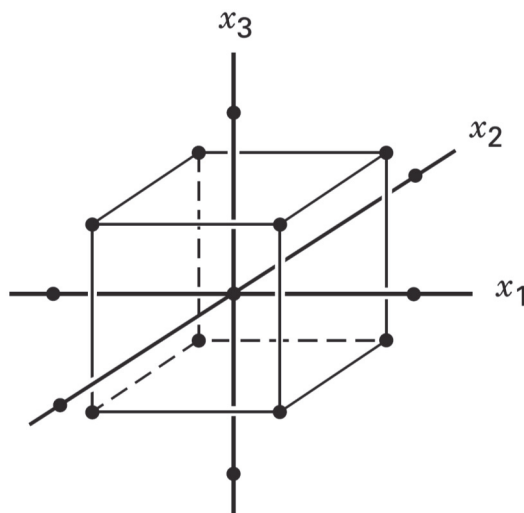
Ako je razlika  $\bar{y}_F - \bar{y}_C$  mala, tada centralne točke leže na ili blizu ravnine koja prolazi točkama plana pokusa i tada nema kvadratne zakrivljenosti. S druge strane, ako je razlika  $\bar{y}_F - \bar{y}_C$  velika, prisutna je kvadratna zakrivljenost. Također, ako nema ponavljanja pojedinih točaka u planu pokusa, moguće je iskoristiti ponavljanja u centru za dobivanje procjene greške sa  $n_c - 1$  stupnjeva slobode. [21]

Ako test zakrivljenosti pokaže potrebu za korištenjem modela drugog stupnja, nažalost, nije moguće procijeniti nepoznate parametre (koeficijente  $\beta$ ) jer model drugog stupnja zahtjeva procjenu šest parametara, a plan pokusa  $2^k$  i centralne točke na slici 2.6 imaju samo pet nezavisnih izvođenja. Jednostavno i vrlo učinkovito rješenje tog problema je proširenje plana pokusa  $2^k$  sa četiri izvođenja na osima kao što je prikazano na slici 2.13. Nastali plan pokusa zove se centralno složeni plan pokusa i može se koristiti za određivanje modela drugog stupnja. [21]



Slika 2.13. Centralno složeni plan pokusa (dva faktora) [21]

Slika 2.14 prikazuje centralno složeni plan pokusa za  $k = 3$  faktora. Takav plan pokusa ima  $14 + n_c$  točaka pokusa (obično je  $3 \leq n_c \leq 5$ ) za određivanje modela drugog stupnja sa  $k = 3$  faktora. [21]



Slika 2.14. Centralno složeni plan pokusa (tri faktora) [21]

U nastavku je dano nekoliko korisnih prijedloga i primjedbi u vezi korištenja centralnih točaka za faktorske planove pokusa u praksi: [21]

1. Kada se faktorski pokus provodi na tekućem procesu, uzeti u obzir korištenje trenutnih radnih uvjeta (ili sredstava) kao centralnu točku plana pokusa. To često osigurava izvođačima da se barem neke točke pokusa izvode pod poznatim uvjetima.
2. Kada centralna točka u faktorskom pokusu odgovara uobičajenim uvjetima rada, osoba koja vrši pokus može iskoristiti promatrane odzive kao grubu provjeru da li se nešto „neobično“ dogodilo za vrijeme pokusa. U principu, odaziv centralnih točaka trebao bi biti vrlo sličan prije promatranim odazivima za vrijeme redovnog izvođenja procesa. Osoblje koje izvodi pokus često popunjava kontrolnu kartu za praćenje izvođenja procesa. Ponekad se odazivi centralnih točaka mogu ispisivati direktno na kontrolne karte kao provjera ponašanja procesa za vrijeme pokusa.
3. Uzeti u obzir izvođenje ponavljanja u centru ne slučajnim redoslijedom. Konkretno, izvoditi jedno ili dva ponavljanja u centru na početku ili blizu početka pokusa, jedno ili dva ponavljanja u sredini i jedni ili dva ponavljanja

blizu završetka pokusa. Razmještanjem ponavljanja u centru kroz vrijeme, osoba koja izvodi pokus ima mogućnost grube provjere stabilnosti procesa tijekom izvođenja pokusa. Na primjer, ako se pojavio nagib u odazivu za vrijeme izvođenja pokusa, ispisivanje odaziva centralnih točaka kroz vrijeme može to pokazati.

4. Ponekad se pokusi izvode u situacijama gdje ima malo ili nema uopće informacija o varijabilnosti procesa. U tim slučajevima, izvođenje dva ili tri ponavljanja u centru na početku pokusa može biti od velike pomoći. Ta izvođenja mogu dati početnu procjenu varijabilnosti procesa. Ako se veličina varijabilnosti čini prihvatljivom, nastaviti pokus; s druge strane, ako je uočena varijabilnost veća od očekivane (ili prihvatljive), zaustaviti pokus. Može biti veoma korisno istražiti zašto je varijabilnost tako velika prije nastavljanja ostatka pokusa.
5. Obično, centralne točke se koriste kada su svi podaci plana pokusa kvantitativni. Doduše, ponekad može biti jedna ili više kvalitativnih ili kategoričkih varijabli i nekoliko kvantitativnih varijabli. U tom slučaju se ipak mogu upotrijebiti točke u centru. Tada su centralne točke smještene na suprotnim stranicama kocke koja obuhvaća kvantitativne varijable. Drugim riječima, ponavljanja u centru se mogu izvoditi na donjim i gornjim razinama kvalitativnih varijabli sve dok taj podprostor obuhvaća samo kvantitativne varijable.

### ***2.3.6. Višefaktorski plan pokusa drugog stupnja – Centralno kompozitni plan pokusa***

Višefaktorski plan pokusa drugog stupnja primjenjuje se onda kada je za polazni matematički model izabran model drugog stupnja. [12]

Kao i kod modela prvog stupnja istraživač utvrđuje koje nezavisne ulazne veličine procesa proglašava važnim za konkretno istraživanje. Te nezavisne ulazne veličine procesa ulaze u matematički model, u kojima se sada zovu nezavisni utjecajni faktori. [12]

U daljnjem koraku potrebno je odrediti razine variranja faktora. Centralno kompozitni planovi drugog reda polaze od naročitog geometrijskog rasporeda eksperimentalnih točaka u eksperimentalnom prostoru, tako da su sve točke jednako udaljene od centra u kojem je

također nekoliko točaka. Pošto se ovdje radi o paraboličkom modelu za njegovo određivanje potrebne su barem tri točke. Protokol za određivanje razina maksimalne i minimalne vrijednosti faktora, te onih u centru plana pokusa je: [12]

$$\begin{aligned} x_{i,min} \\ x_{i,max} \\ x_{i,sr} = \frac{x_{imin}+x_{imax}}{2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Matrica plana pokusa kod višefaktorskog plana pokusa drugog stupnja, za razliku od matrice plana pokusa prvog stupnja, ima još dodane točke. Te dodatne točke, u planu pokusa su, razine faktora " $\pm x_{ia}$ " i sa vrijednostima faktora u centru plana čine tri neophodne točke koje služe za definiciju parabolične funkcije. One se postavljaju na središnje koordinatne osi, odnosno koordinate osi koje prolaze kroz centar plana, i računaju se prema: [12]

$$\begin{aligned} I_i &= \frac{x_{i,max}-x_{i,sr}}{2} \\ \pm x_{i,\alpha} &= x_{i,sr} \pm \alpha I_i \\ \alpha &= (2^k)^{1/4} \end{aligned} \quad (2.27)$$

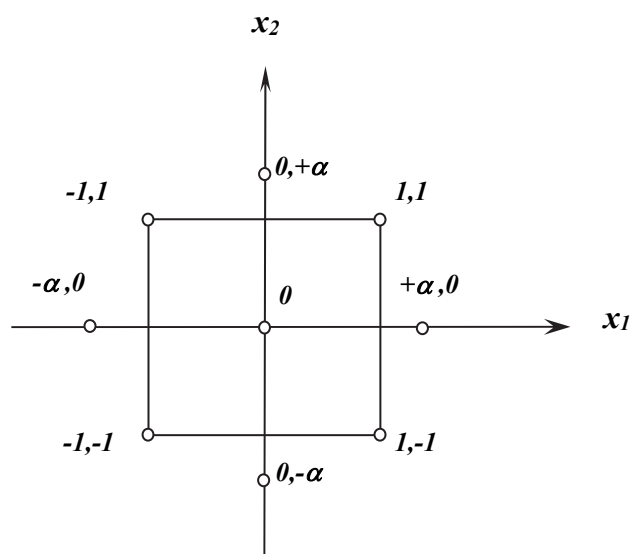
Kod višefaktorskog plana pokusa drugog stupnja ukupni broj eksperimentalnih točaka ( $N$ ) računa se prema formuli: [12]

$$N = 2^k + 2k + n_0 \quad (2.28)$$

Broj točaka u centru plana pokusa je za: [12]

$$\begin{aligned} k = 2 &\rightarrow n = 5 \\ k = 3 &\rightarrow n = 6 \\ k = 4 &\rightarrow n = 7 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Sve do sada definirane veličine faktora (razine variranja) potrebno je upisati u za to predviđenu tablicu.



Slika 2.15. Raspored eksperimentalnih točaka u planu pokusa " $2^2+2 \cdot 2+5$ " [12]

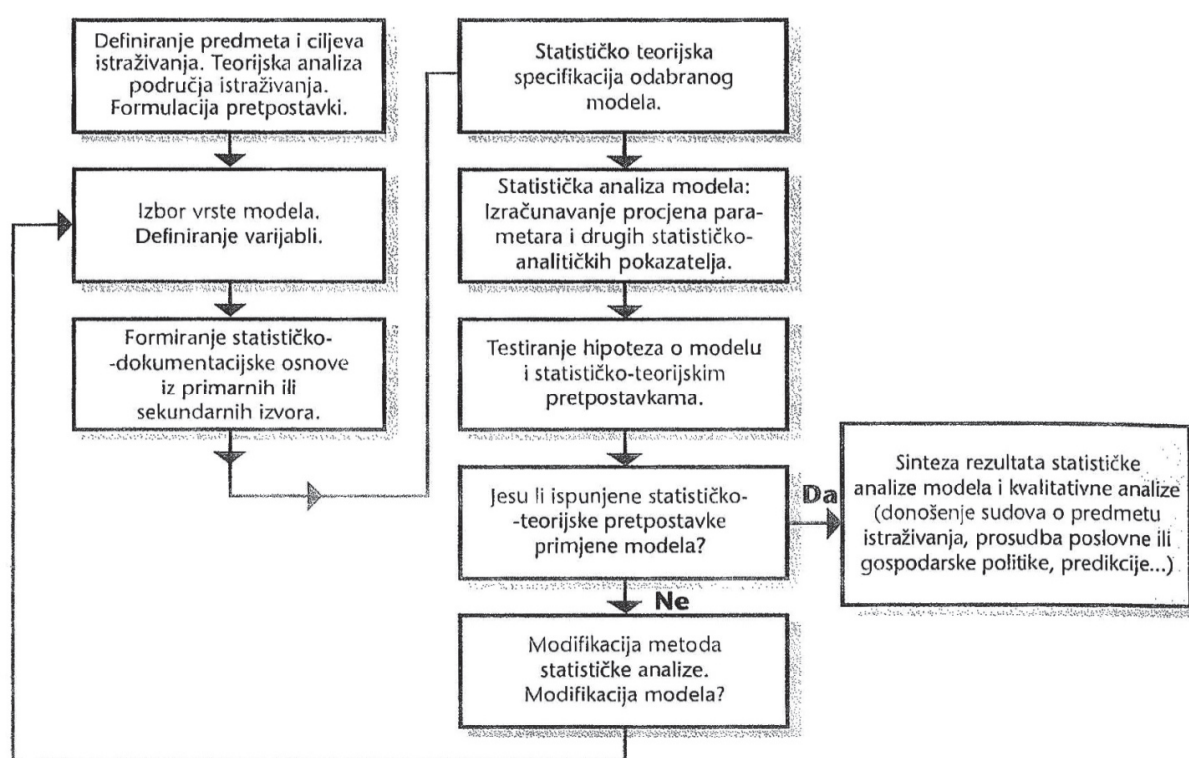
Tablica 2.3. Matrica plan pokusa " $2^2+2 \cdot 2+5$ " [12]

	kod faktora	
	$x_1$	$x_2$
1	-1	-1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	+1	+1
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	$-\alpha$	0
11	$+\alpha$	0
12	0	$-\alpha$
13	0	$+\alpha$

## 2.4. Regresijska analiza

Regresijska analiza je jedna od najvažnijih i najčešće korištenih statističkih metoda koja se primjenjuje u gotovo svim stručnim i znanstvenim područjima prilikom istraživanja međusobnog odnosa dviju ili više varijabli. Zadaća regresijske analize je da pronade regresijski model, odnosno oblik veze između jedne zavisne varijable i jedne ili više nezavisnih varijabli pri čemu se analitički izražava statistički odnos među pojavama. [17][20]

Uobičajeni koraci u postavljanju i analizi regresijskog modela mogu se predložiti dijagramom toka prikazanim na Slici 2.16. [18]



Slika 2.16. Dijagram toka regresijske analize [18]

Opći je oblik regresijskog modela: [17]

$$y = \phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) + \varepsilon \quad (2.30)$$

$y$  – zavisna varijabla

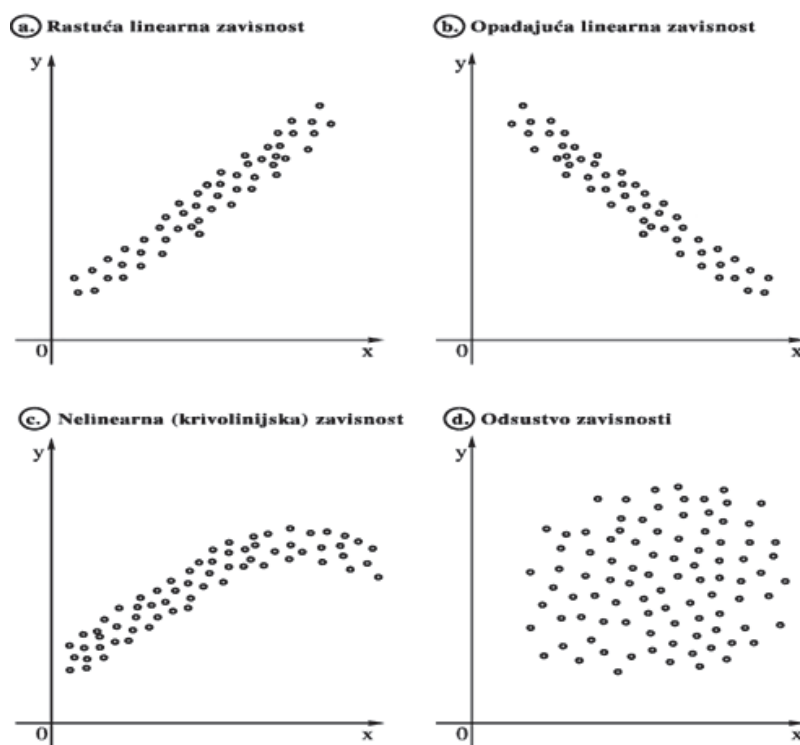
$x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$  – nezavisne varijable

$\varepsilon$  – slučajna komponenta; razlika; ostatak (greška)



Regresijski model sastoji se od jedne jednadžbe i ima zavisnu varijablu i jednu ili više nezavisnih varijabli. Kada su u modelu jedna zavisna i jedna nezavisna varijabla, riječ je od modelu jednostavne regresije. Ako model sadrži jednu zavisnu i dvije ili više nezavisnih varijabli govori se o modelu višestruke (multiple) regresije. Svaki regresijski model, uz zavisnu i nezavisne varijable, ima i slučajnu varijablu (formula 2.30) koja ga također čini statističkim modelom i po čemu se razlikuje od determinističkih modela. [19]

Kao pomoćno sredstvo za određivanje oblika funkcije može se koristiti dijagram rasipanja konstruiran u pravokutnom koordinatnom sustavu tako da se na osi apcisa nalazi nezavisna varijabla, a na osi ordinata zavisna varijabla. Prema rasporedu točaka donosi se sud o mogućem obliku funkcije  $\phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ . Slika 2.17 prikazuje neka tipična rasipanja točaka.



Slika 2.17. Tipični dijagrami rasipanja [22]

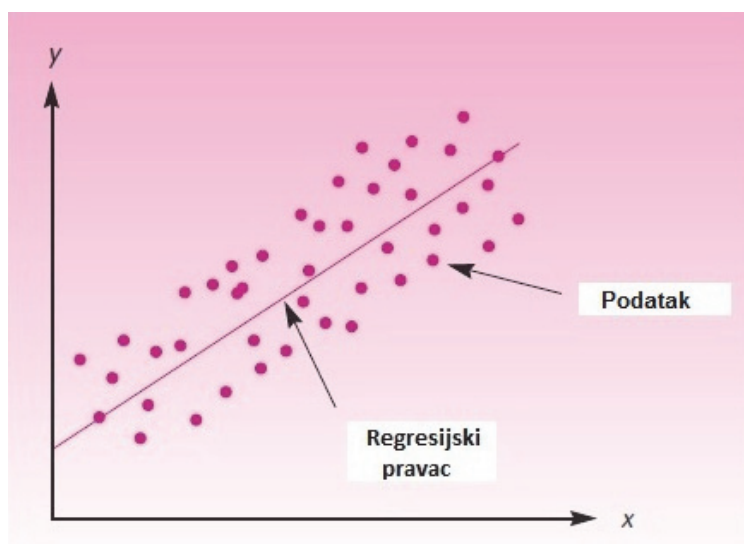
#### 2.4.1. Model jednostavne linearne regresije

Modelom jednostavne regresije naziva se model koji sadrži jednu zavisnu i jednu nezavisnu varijablu. Regresijska analiza provodi se na temelju  $n$  parova vrijednosti varijabli  $x$  i  $y$ :  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , pa se model prikazuje sustavom od  $n$  jednadžbi: [17][20]

$$y_i = b_0 + b_1 x_i + \varepsilon_i \quad (2.31)$$

Bit metode je odrediti i statistički procijeniti koeficijente  $b_0$  i  $b_1$  kako bi se dobio stvarni (statistički procijenjeni) model (regresijski pravac): [13]

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x \quad (2.32)$$



Slika 2.18. Regresijski pravac [20]

Iz jednadžbi (2.31) i (2.32) proizlazi izraz za ostatak (grešku): [17]

$$\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - b_0 - b_1 x_i \quad (2.33)$$

Potrebno je odrediti kriterij prema kojemu će se izabrati jednadžba regresijskog pravca tako da pravac  $\hat{y}$  prolazi između stvarnih točaka promatranih varijabli i da najbolje tumači vezu između njih, odnosno pravac mora biti takav da odstupanja (greške) budu najmanja. U tu svrhu najčešće se koristi metoda najmanjih kvadrata jer ako bi se izbor funkcije temeljio na veličini zbroja odstupanja taj zbroj ne bi bio dobra osnovica za izbor adekvatne linearne funkcije jer se moguća velika odstupanja s pozitivnim predznakom mogu pokratiti s velikim odstupanjima negativnog predznaka pa će zbroj odstupanja biti mali, premda je riječ o pravcu slabe reprezentativnosti. Jednadžba (2.34) predstavlja polazni izraz za zbroj kvadrata odstupanja: [17][13]

$$SKO_{ostatka} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (b_0 + b_1 x_i)]^2 \rightarrow \min \quad (2.34)$$

Primjenom postupka određivanja minimuma funkcije dolazi se do normalnih jednadžbi čije je rješenje: [13]

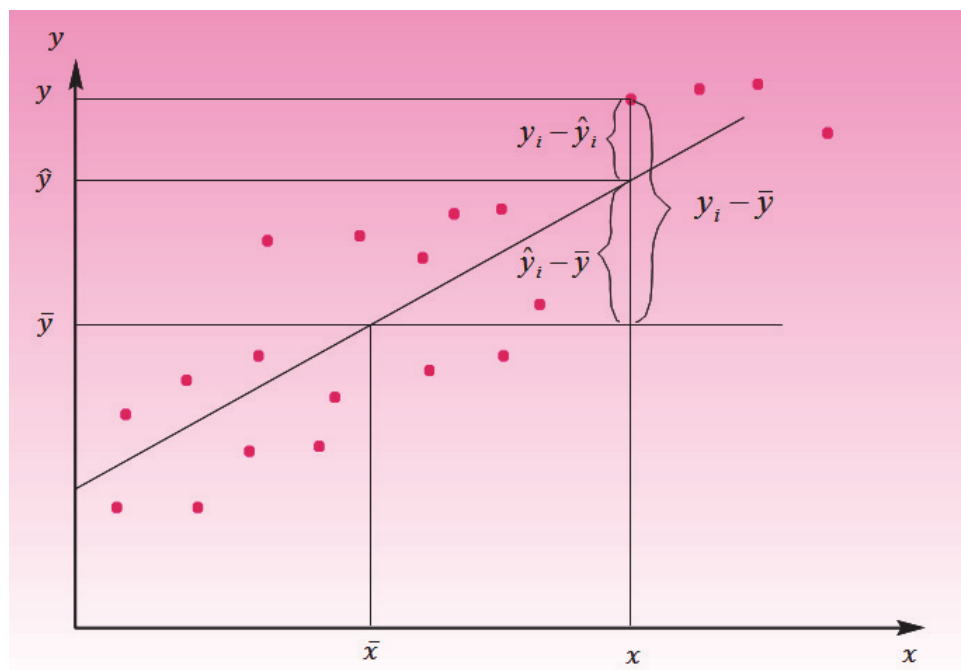
$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}; \quad b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} \quad (2.35)$$

Navedeni model (formula 2.32) ima sljedeća svojstva: [17]

- Zbroj odstupanja stvarnih vrijednosti zavisne varijable  $y$  od regresijskih vrijednosti  $\hat{y}$  jednak je 0
- Zbroj kvadrata tih odstupanja je minimalan
- Zbroj produkata regresijskih vrijednosti i rezidualnih odstupanja jednak je 0
- Zbroj produkata vrijednosti nezavisne varijable i rezidualnih odstupanja jednak je 0

Ocijenjeni model je reprezentativniji ako je ostatak manji. [17]

Statističko-analiitičke veličine za ocjenjivanje reprezentativnosti regresije temelje se na analizi koja slijedi iz slike 2.19. [17]



Slika 2.19. Raščlamba odstupanja [20]

$$(y_i - \bar{y}) = (\hat{y}_i - \bar{y}) + (y_i - \hat{y}_i) \quad (2.36)$$

Kvadriranjem izraza (2.36) i zbrajanjem članova dolazi se do jednadžbe (2.37) koja je temelj analize varijance. [13][17]

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (2.37)$$

$$SKO_{\text{ukupno}} = SKO_{\text{protumačeno}} + SKO_{\text{ostatka}}$$

Jednadžba (2.37) predstavlja razdiobu ukupnog zbroja kvadrata na dva člana. Prvi član je zbroj kvadrata odstupanja regresijskih vrijednosti od njihove aritmetičke sredine i naziva se sumom kvadrata odstupanja protumačenih modelom (protumačena suma kvadrata). Drugi član je zbroj kvadrata odstupanja empirijskih vrijednosti zavisne varijable od regresijskih vrijednosti i naziva se ne protumačenom sumom kvadrata (suma kvadrata ostatka). [18]

Analiza varijance za model jednostavne regresije oslanja se na navedenu raščlambu kvadrata odstupanja vrijednosti zavisne varijable od njezine aritmetičke sredine. Procjena varijance i komponente (sredine kvadrata) određuju se tako da se pojedini zbrojevi kvadrata podjele s pripadajućim stupnjevima slobode. [17]

Broj stupnjeva slobode dobije se oduzimanjem broja vrijednosti koje se moraju odrediti iz uzorka da bi se dobila suma kvadrata od ukupnog broja podataka u uzorku. [14]

Ukupnom zbroju kvadrata pridružuje se (n-1) stupanj slobode, protumačenom zbroju 1 stupanj slobode, a zbroju kvadrata ostatka (n-2) stupnja slobode. Veličine za analizu varijance uobičajeno se predočuju u tablici analize varijance (tablica ANOVA). [17][20][21]

Tablica 2.4. Tablica analize varijance (Tabela ANOVA) [17]

Izvor varijacija	Stupnjevi slobode	Zbroj kvadrata	Sredina kvadrata	Empirijski F-omjer
Protumačeno modelom	1	$SKO_{\text{protumačeno}} = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$\frac{SKO_{\text{protumačeno}}}{1}$	$F = \frac{SKO_{\text{protumačeno}}/1}{SKO_{\text{ostatka}}/(n-2)}$
Ostatak (Ne protumačena odstupanja)	n-2	$SKO_{\text{ostatka}} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$	$\frac{SKO_{\text{ostatka}}}{n-2}$	-
Ukupno	n-1	$SKO_{\text{ukupno}} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$	-	-

Suma kvadrata odstupanja podijeljena s (n-2) stupnjeva slobode je procijenjena varijanca regresije: [13][18][20][21]

$$s_R^2 = \frac{SKO_{ostatka}}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2} \quad (2.38)$$

Pozitivni drugi korijen iz procjene varijance regresije je standardna devijacija: [18]

$$s_R = \sqrt{\frac{SKO_{ostatka}}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}} \quad (2.39)$$

Koeficijent varijacije je relativna mjera rasipanja vrijednosti y oko regresije i računa se kao omjer standardne devijacije i aritmetičke sredine zavisne varijable pomnožen sa sto. [18]

$$V_s = \frac{s_R}{\bar{y}} 100 \quad (2.40)$$

Pokazatelj reprezentativnosti regresije je i koeficijent determinacije koji utvrđuje koliko je promjene zavisne varijable objašnjeno promjenom nezavisne varijable. Računa se kao omjer protumačenog i ukupnog zbroja kvadrata: [13][17]

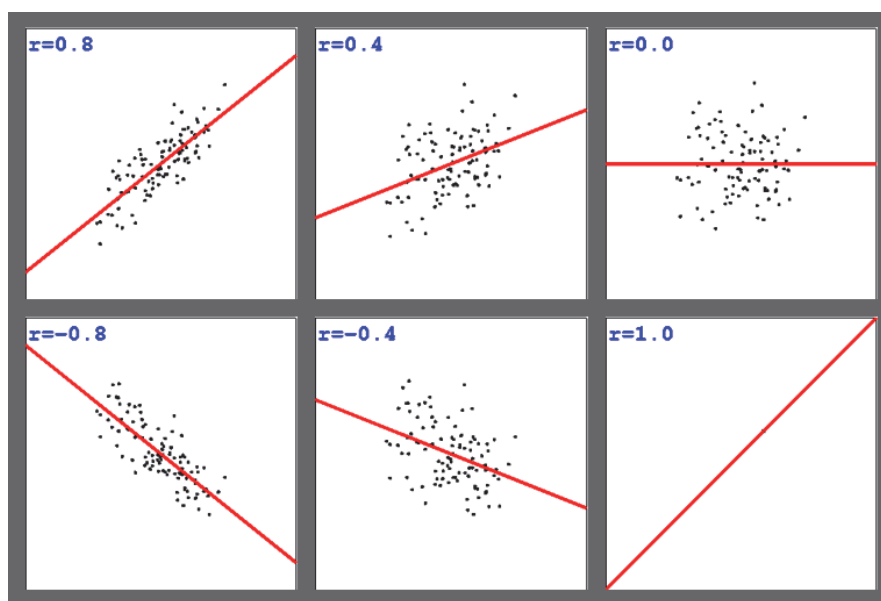
$$R = r^2 = \frac{SKO_{protumačeno}}{SKO_{ukupno}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, \quad 0 \leq r^2 \leq 1 \quad (2.41)$$

$$R = r^2 = 1 - \frac{SKO_{ostatka}}{SKO_{ukupno}} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (2.42)$$

Koeficijent determinacije varira u zatvorenom intervalu od nule do jedan. Jednak je nuli ako je protumačen zbroj kvadrata jednak nuli. Poželjna je velika vrijednost tog koeficijenta (blizu jedan) jer to znači da je mala greška modela. [17]

Pokazatelj usko povezan s koeficijentom determinacije je koeficijent jednostavne linearne korelacije  $r$  kojim se mjeri smjer i jakost linearne povezanosti među varijablama  $x$  i  $y$ . Računa se kao drugi korijen iz koeficijenta determinacije. [15][13]

$$r = \pm\sqrt{r^2}, \quad -1 \leq r \leq 1 \quad (2.43)$$



Slika 2.20. Primjeri kretanja koeficijenta korelacije za različite grupe podataka [13]

#### 2.4.2. Model višestruke linearne regresije

U modelu jednostavne regresije varijacije zavisne varijable objašnjavaju se pomoću varijacija jedne nezavisne varijable i slučajne veličine (slučajnih odstupanja). U istraživanjima često na jednu pojavu djeluje više njih. Statističko-analitički se varijacija jedne pojave u ovisnosti o dvjema pojavama ili o više njih izražava pomoću modela višestruke regresije. Za primjenu regresijskog modela nužno je odrediti koja je varijabla zavisna, a koje su nezavisne. Zatim slijedi određivanje oblika funkcije u modelu te svojstva slučajne varijable. [17]

Vrlo je često oblik funkcije linearan, a varijabla  $\varepsilon$  je komponenta u zbroju s ostalim članovima pa je riječ o modelu višestruke linearne regresije: [18]

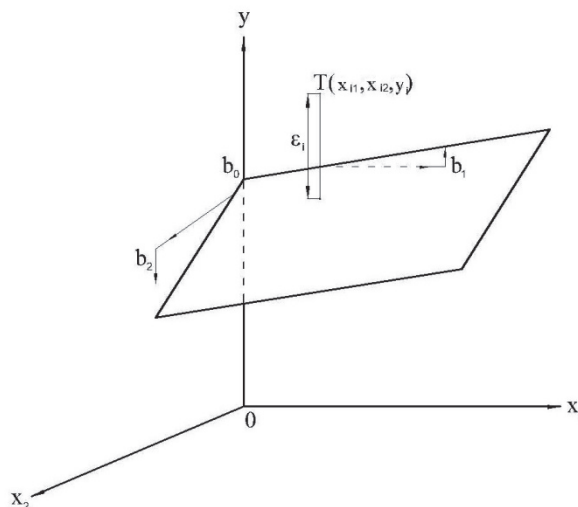
$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_jx_j + \dots + b_kx_k + \varepsilon \quad (2.44)$$

$k$  – broj nezavisnih varijabli

Izraz (2.45) prikazuje model višestruke linearne regresije zapisan u obliku  $n$  linearnih jednadžbi: [18]

$$y_i = b_0 + b_1x_{i1} + b_2x_{i2} + \dots + b_jx_{ij} + \dots + b_kx_{ik} + \varepsilon_i \quad (2.45)$$

Prvi korak u analizi sastoji se u ocjeni parametara i u tu svrhu se, kao i kod jednostavne linearne regresije, primjenjuje metoda najmanjih kvadrata. Slika 2.21. je geometrijski prikaz za model s dvije nezavisne varijable: [17]



Slika 2.21. Geometrijski prikaz modela višestruke regresije s dvije nezavisne varijable [17]

Kod primjene metode najmanjih kvadrata polazi se od ostatka prikazanog izrazom (2.46): [17]

$$\varepsilon_i = y_i - (b_0 + b_1x_{i1} + b_2x_{i2} + \dots + b_jx_{ij} + \dots + b_kx_{ik}) = y_i - \hat{y}_i \quad (2.46)$$

Ostatak je razlika između stvarnih vrijednosti zavisne varijable i vrijednosti regresijske funkcije (vrijednosti koje leže na ravnini). Zbroj kvadrata odstupanja je: [17]

$$SKO_{ostatka} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - b_0 - b_1x_{i1} - b_2x_{i2} - \dots - b_jx_{ij} - \dots - b_kx_{ik}]^2 \rightarrow \min \quad (2.47)$$

Primjenom postupka traženja minimuma funkcije (2.47) dolazi se do sustava od  $(k+1)$  normalnih jednadžbi oblika: [17][18][20][21]

[illegible]

Za razliku od modela jednostavne linearne regresije gdje je bilo moguće iz normalnih jednadžbi izvesti izraze za koeficijente  $b_0$  i  $b_1$ , u slučaju modela višestruke regresije neizbježno je rješavanje sustava normalnih jednadžbi (2.48).

Konačni oblik jednadžbe višestruke linearne regresije s ocjenjenim parametrima predočava se u obliku izraza (2.49): [17][20]

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_jx_j + \dots + b_kx_k \quad (2.49)$$

Ocjena parametara predstavlja prvi zadatak u regresijskoj analizi. Primjenjujući odgovarajuće metode, nužno je odrediti pokazatelje reprezentativnosti i druge statističko-analitičke veličine pomoću kojih se donosi odluka o kvaliteti regresijskog modela. Kao i kod analize jednostavne linearne regresije, zbrojevi kvadrata i drugi elementi potrebni za statističku analizu uobičajeno se prikazuju u standardnoj tabeli analize varijance.[17][20][21]

Tablica 2.5. Tabela ANOVA za višestruku regresiju [17]

Izvor varijacija	Stupnjevi slobode	Zbroj kvadrata	Sredina kvadrata	Empirijski F-omjer
Protumačeno modelom	$k$	$SKO_{protumačeno} = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$\frac{SKO_{protumačeno}}{k}$	$F = \frac{SKO_{protumačeno} / k}{SKO_{ostatka} / (n - k - 1)}$
Ostatak (Ne protumačena odstupanja)	$n-k-1$	$SKO_{ostatka} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$	$\frac{SKO_{ostatka}}{n-k-1}$	-
Ukupno	$n-1$	$SKO_{ukupno} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$	-	-



Kako je to prikazano u poglavlju 2.3.5. plan pokusa se može izvoditi sa ponavljanjem u centralnoj točki. Do sada prikazana analiza varijance za višestruku regresiju ne uzima posebno u obzir rasipanje rezultata u centralnoj točki. Pojedini programski paketi za obradu podataka analizu varijance izvode tako da se testiranje modela izvodi preko rasipanja točaka u centru plana pokusa (Tablica 2.6).

Tablica 2.6. Tabela ANOVA za višestruku regresiju (preko rasipanja u centru) [11]

Izvor varijacija	Stupnjevi slobode	Zbroj kvadrata	Sredina kvadrata	Empirijski F-omjer
Ostatak bez centra	$(n-k-1)-(n_c-1)$	$SKO_{\text{ostataka bez centra}} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 - \sum_{i=1}^{n_c} (y_{ic} - \hat{y}_{ic})^2$	$\frac{SKO_{\text{ostataka bez centra}}}{(n-k-1)-(n_c-1)}$	$F = \frac{\frac{SKO_{\text{ostataka bez centra}}}{(n-k-1)-(n_c-1)}}{\frac{SKO_{\text{centra}}}{n_c-1}}$
Greška centra	$n_c-1$	$SKO_{\text{centra}} = \sum_{i=1}^{n_c} (y_{ic} - \hat{y}_{ic})^2$	$\frac{SKO_{\text{centra}}}{n_c-1}$	-
Ukupno	$n-1$	$SKO_{\text{ukupno}} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$	-	-

Izrazi za procijenjene varijance višestruke regresije, standardnu devijaciju višestruke regresije, koeficijent varijacije višestruke i koeficijent determinacije višestruke regresije ekvivalentni su izrazima za jednostavnu regresiju: [18][21]

$$s_R^2 = \frac{SKO_{\text{ostataka}}}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}$$

$$s_R = \sqrt{\frac{SKO_{\text{ostataka}}}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}} \quad (2.50)$$

$$V_s = \frac{s_R}{\bar{y}} 100$$

$$R = r^2 = \frac{SKO_{protumaceno}}{SKO_{ukupno}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}; \quad 0 \leq r^2 \leq 1 \quad (2.51)$$

Pošto  $r^2$  uvijek raste dodavanjem varijabli u model ponekad je poželjno koristiti korigirani koeficijent determinacije definiran kao: [21]

$$\bar{R} = \bar{r}^2 = 1 - \frac{\frac{SKO_{ostatka}}{n-1}}{\frac{SKO_{ukupno}}{n-1}} = 1 - \frac{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-k-1}}{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}} = 1 - \frac{n-1}{n-k-1} (1-r^2) \quad (2.52)$$

Općenito, korigirani koeficijent determinacije se u pravilu ne povećava dodavanjem varijabli u model, nego se čak i smanjuje ako se dodaju nepotrebne varijable u model. Kada se vrijednosti  $\bar{r}^2$  i  $r^2$  značajno razlikuju, postoji velika vjerojatnost da je u model dodana nesignifikantna varijabla. [21]

### 2.4.3. Testiranje hipoteza

#### 2.4.3.1. Ispitivanje signifikantnosti parametara $b_j$ u modelu ( $t$ -test)

Testiranje hipoteza o signifikantnosti pojedinih regresijskih koeficijenata je korisno kod određivanja značajnosti svake regresijske varijable u modelu. Na primjer, adekvatnost modela može se povećati ako se uključi dodatna signifikantna varijabla ili ako se možda odbaci jedna ili više nesignifikantnih varijabli već prisutnih u modelu. [21]

Test veličina je empirijski  $t$ -omjer koja se ravna po Studentovoj distribuciji s  $[n-k-1]$  stupnjeva slobode. Odluka se donosi usporedbom empirijske vrijednosti s teorijskom vrijednosti  $t$  za danu razinu signifikantnosti  $\alpha$ . [18]

$$t = \frac{b_j}{s_b}; \quad s_b = \sqrt{\frac{s_R^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}} \quad (2.53)$$

Odgovarajuće hipoteze za taj test su: [21]

$$\begin{aligned} H_0 \dots b_j &= 0 \\ H_1 \dots b_j &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} |t| < t_{[\alpha/2, n-1-k]} &- \text{prihvaća se hipoteza } H_0 \text{ (odbacuje se hipoteza } H_1) \\ |t| > t_{[\alpha/2, n-1-k]} &- \text{prihvaća se hipoteza } H_1 \text{ (odbacuje se hipoteza } H_0) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Odluka se ekvivalentno donosi na temelju  $p$ -vrijednosti (prag signifikantnosti), koja se za dvosmjernan test računa prema izrazu: [18][21]

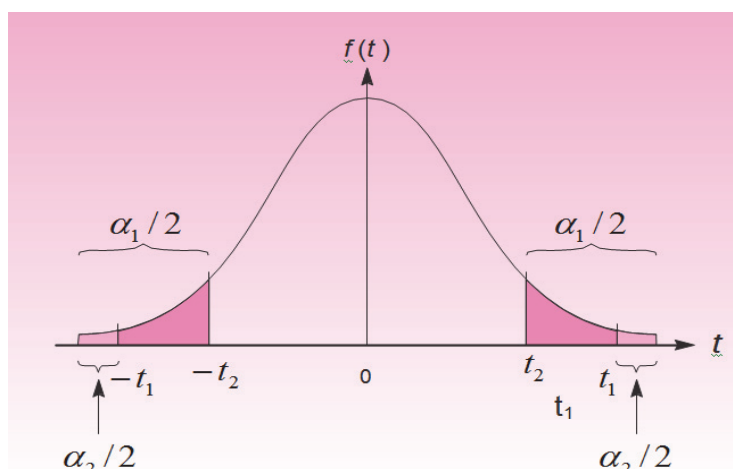
$$p = 2 \cdot P(T > |t|)$$

(2.56)

$$\begin{aligned} p > \alpha &- \text{prihvaća se hipoteza } H_0 \text{ (odbacuje se hipoteza } H_1) \\ p < \alpha &- \text{prihvaća se hipoteza } H_1 \text{ (odbacuje se hipoteza } H_0) \end{aligned} \quad (2.57)$$

$P$ -vrijednost predstavlja vjerojatnost odbacivanja istinite nulte hipoteze izračunate pomoću podataka iz uzorka, odnosno test veličine. Što je manja  $p$ -vrijednost manja je i empirijski utvrđena vjerojatnost odbacivanja istinite nulte hipoteze i obrnuto. [27]

Ako prihvatimo hipotezu  $H_0$ , to znači da možemo izbaciti varijablu  $x_j$  iz modela. [21]



Slika 2.22.  $t$ -distribucija sa kritičnim točkama [20]

### 2.4.3.2. Ispitivanje adekvatnosti modela (*F-test*)

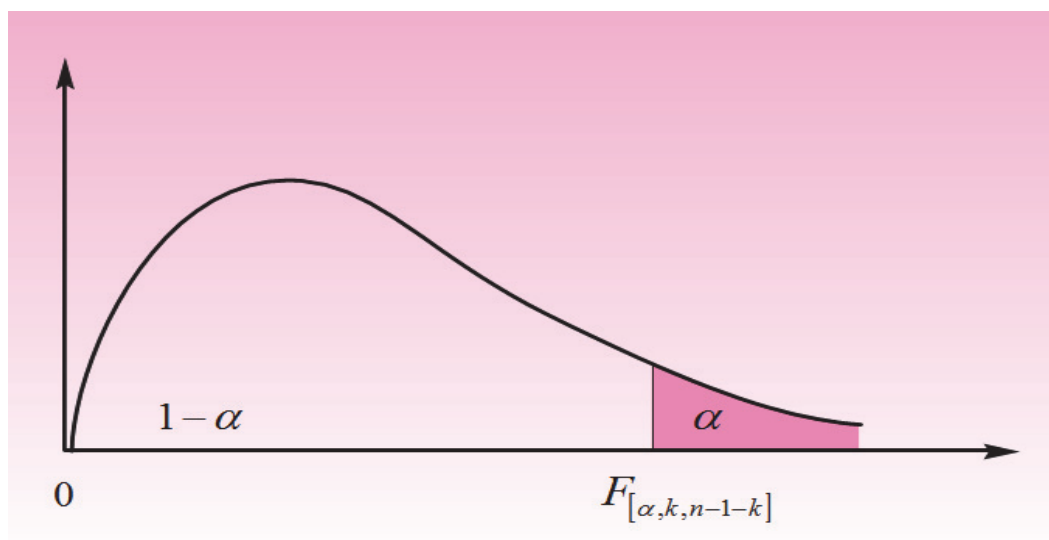
Ispitivanje adekvatnosti modela svodi se na određivanje da li postoji dovoljno jak odnos između zavisne varijable i nezavisnih varijabli, odnosno jeli model adekvatan prema zadanom kriteriju. Odgovarajuće hipoteze za taj test su:[21]

$$\begin{aligned} H_0 \dots b_1 = b_2 = \dots = b_k = 0 \\ H_1 \dots b_j \neq 0 \quad \text{za barem jedan } j \end{aligned} \quad (2.58)$$

Odbacivanje hipoteze  $H_0$  implicira da je barem jedna od nezavisnih varijabli  $x_1, x_2, \dots, x_k$  značajna u modelu. Odluka se donosi usporedbom empirijskog  $F$ -omjera koji se nalazi u tabeli ANOVA s teorijskim vrijednostima  $F$ -distribucije za razinu signifikantnosti  $\alpha$  i broj stupnjeva slobode  $[k, n-k-1]$  po pravilima: [13][18][21]

$$\begin{aligned} F < F_{[\alpha, k, n-1-k]} & \text{ - prihvaća se hipoteza } H_0 \text{ (odbacuje se hipoteza } H_1) \\ F > F_{[\alpha, k, n-1-k]} & \text{ - prihvaća se hipoteza } H_1 \text{ (odbacuje se hipoteza } H_0) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Slika 2.23. prikazuje  $F$ -distribuciju sa kritičnim vrijednostima:



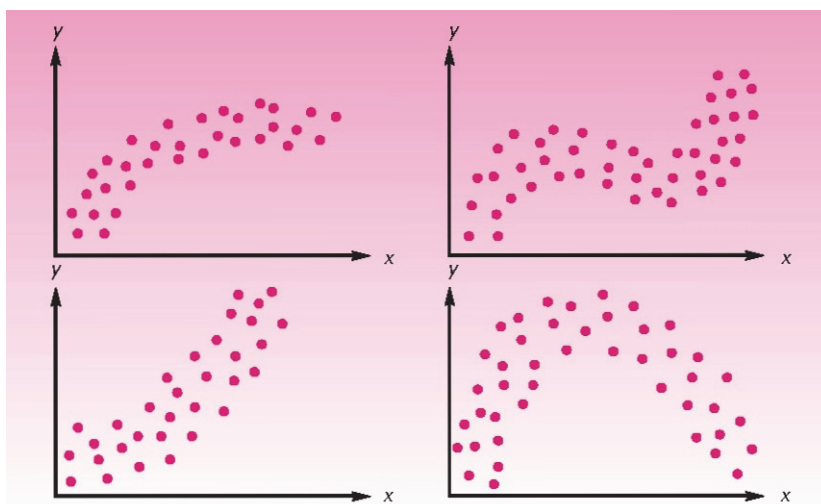
Slika 2.23.  $F$ -distribucija sa kritičnim vrijednostima [20]

#### 2.4.4. Analiza nelinearnih matematičkih modela

Postoje nelinearni modeli koje je moguće prikladnim transformacijama svesti na model linearne regresije. Iako su su neki modeli nelinearni u regresorskim varijablama, sa stajališta statističke analize, oni su linearni jer se u pravilu model smatra linearnim ako su nepoznati parametri u prvoj dimenziji. [17] U nastavku je prikazano nekoliko nelinearnih modela i način na koji se oni analiziraju metodama analize višestruke linearne regresije.

##### 2.4.4.1. Regresijski polinom

Često, odnos između zavisne varijable i jedne ili više nezavisnih varijabli nije pravocrtan. Slika 2.24 prikazuje nekoliko takvih primjera. [20]



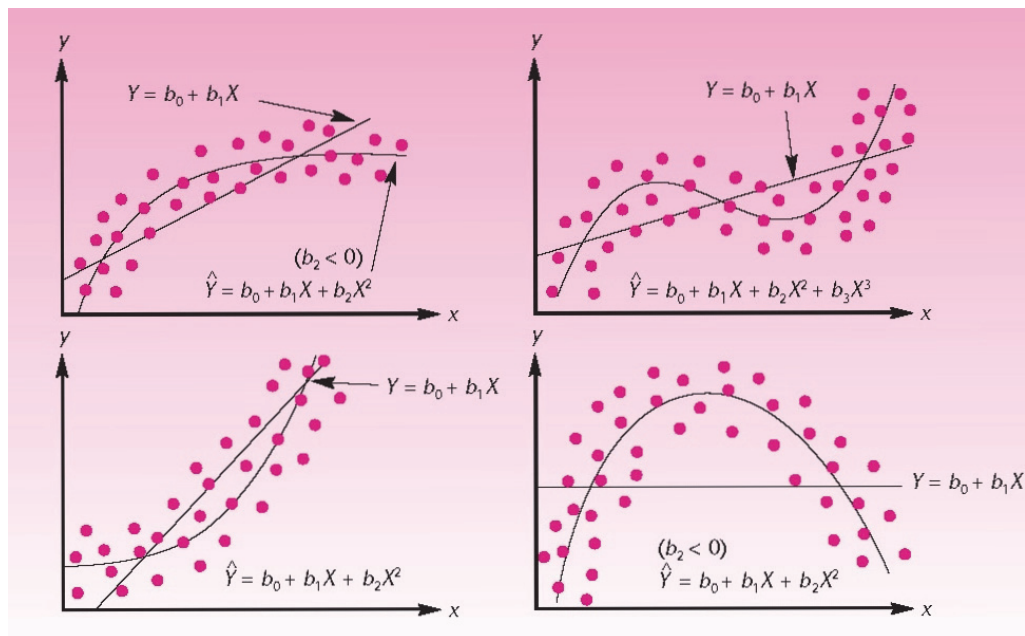
Slika 2.24. Primjer nelinearnih odnosa među varijablama [20]

Za svaki od prikazanih primjera, pravac ne slijedi podatke pa se odabiru polinomi reda većeg od jedan jer oni puno bolje opisuju model. Takvi polinomi se i dalje smatraju linearnim regresijskim modelima. Samo modeli gdje svi koeficijenti regresije nisu prvog reda su nelinearni modeli. [20]

Modelom regresijskog polinoma varijacija zavisne varijable objašnjava se varijacijama regresorske varijable. Model regresijskog polinoma s ocijenjenim parametrima u općem obliku prikazan je izrazom (2.60):

$$\hat{y} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_jx^j + \dots + b_kx^k \quad (2.60)$$

Slika 2.25. prikazuje usporedbu odnosa podataka sa modelom jednostruke linearne regresije i regresijskog polinoma. Iz slike je jasno vidljivo da se za zadani skup podataka veza među varijablama daleko bolje opisuje regresijskim polinomom: [20]



Slika 2.25. Usporedba opisa podataka [20]

Izraz (2.60) predstavlja standardni model regresijskog polinoma, koji se, kako je istaknuto, analizira na isti način kao i model višestruke regresije. Postoje i drugi oblici nelinearnog modela, u kome je nezavisna varijabla  $x$  s potencijom, a mogu se svesti na standardni regresijski model. Primjer za to je model dan izrazom (2.61): [17]

$$y_i = e^{b_0 + b_1x_i + b_2x_i^2 + \dots + b_kx_i^k + \varepsilon_i} \quad (2.61)$$

Logaritmiranjem, izraz (2.61) postaje: [17]

$$\ln y_i = b_0 + b_1x_i + b_2x_i^2 + \dots + b_kx_i^k + \varepsilon_i \quad (2.62)$$

Model (2.62) jednak je modelu standardnog regresijskog polinoma. Razlika je jedino u tome što se umjesto originalnih vrijednosti zavisne varijable upotrebljavaju prirodni logaritmi ( $e$  je u izvornom modelu baza prirodnog logaritma). [17]

#### 2.4.4.2. Eksponecijalni model višestruke regresije

U općem aditivnom modelu višestruke regresije vrijednost zavisne varijable izražava se kao zbroj vrijednosti funkcije regresorskih varijabli i slučajnih odstupanja. Model višestruke linearne regresije karakterističan je po aditivnosti svih komponenti u njemu. Ponekad će kvalitativna analiza upozoriti na potrebu uporabe nelinearnih modela u kojima su komponente faktori produkta. Postoji veoma velik broj pojava oblika takvih modela, od kojih je izdvojen model sljedećeg oblika: [17] [18]

$$y_i = b_0 x_{i1}^{b_1} x_{i2}^{b_2} \dots x_{ij}^{b_j} \varepsilon^i \quad (2.63)$$

Model naveden izrazom (2.63) linearizira se logaritamskom transformacijom u izraz (2.64): [17]

$$\ln y_i = \ln b_0 + b_1 \ln x_{i1} + b_2 \ln x_{i2} + \dots + b_j \ln x_{ij} + \dots + b_k \ln x_{ik} + \varepsilon_i \quad (2.64)$$

I ovdje se odmah uočava sličnost izraza (2.64) i (2.46). Transformirani model (2.64) je sa stajališta metode analize jednak modelu višestruke linearne regresije. U tom modelu zavisnu varijablu i nezavisne varijable predstavljaju njihove logaritamske vrijednosti. Model s ocijenjenim parametrima metodom najmanjih kvadrata je: [17]

$$\ln \hat{y} = \ln b_0 + b_1 \ln x_1 + b_2 \ln x_2 + \dots + b_j \ln x_j + \dots + b_k \ln x_k \quad (2.65)$$

Regresijski koeficijenti u modelu (2.65) predstavljaju ocjene koeficijenata parcijalne elastičnosti. S tim u vezi, koeficijenti  $b$  se interpretiraju na specifičan način. Regresijski koeficijent  $b_j$  pokazuje za koliko se postotaka mijenja regresijska vrijednost zavisne varijable ako se nezavisna varijabla  $x_j$  poveća za 1%, uz uvjet da se ne mijenjaju vrijednosti preostalih varijabli. [17]

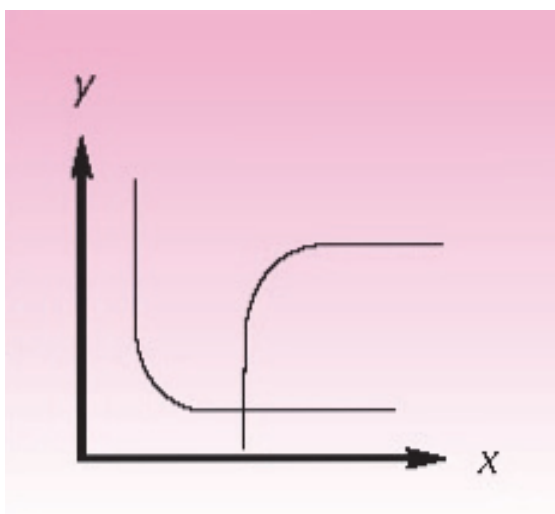
#### 2.4.4.3. Recipročni model

Još jedan nelinearni model koji se može linearizirati odgovarajućom transformacijom je recipročni model. Izrazom (2.66) prikazan je recipročni model sa nekoliko varijabli: [20]

$$y = \frac{1}{b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \varepsilon} \quad (2.66)$$

Model (2.66) postaje linearan tako da se daju recipročne vrijednosti i lijeve i desne strane jednadžbe. Praktički gledano, vrši se regresijska analiza  $1/y$  naspram nepromijenjenih varijabli  $x_i$ . [20]

Poseban slučaj je recipročan model s jednom nezavisnom varijablom koji se linearizira uzimanjem recipročnih vrijednosti od obje varijable ( $x$  i  $y$ ). Slika 2.26 prikazuje specifične krivulje za takav model. Ako podaci pokazuju vezu sa jednom od ovih krivulja na slici može se upotrijebiti regresija  $1/y$  naspram  $1/x$ . [20]



Slika 2.26. Primjer odnosa za specifični recipročni model [20]



### 2.4.5. Ispitivanje adekvatnosti nelinearnih modela

Prilikom obrade podataka za procjenu parametara modela drugog stupnja neizbježno je koristiti modul nelinearne estimacije parametara (nonlinear estimation) u nekom od statističkih paketa. Za razliku od ispitivanja adekvatnosti linearnih regresijskih modela, kod ispitivanja adekvatnosti nelinearnih modela, programski paket Statistica 10.0.1011.0 proizvođača StatSoft korišten u ovom radu, koristi izmijenjeni oblik tablice analize varijance (ANOVA). Tablica 2.7 prikazuje izvorni oblik ANOVA tablice u obliku kakvom je daje porizvođač programskog paketa.

Tablica 2.7. Izvorni oblik ANOVA tablice za modul „nonlinear estimation“ [26]

Izvor varijacija	Stupnjevi slobode	Zbroj kvadrata	Sredina kvadrata	Empirijski F-omjer
Protumačeno modelom	$n$	$SSR = \sigma Y^2 - g(\theta_0)$	$MSR = SSR/n$	$MSR/MSE$
Ostatak (Ne protumačena odstupanja)	$m-n$	$SSE = g(\theta_0)$	$MSE = SSE/(m-n)$	-
Ukupno	$m$	$SST = \sigma Y^2$	-	-

Radi lakšeg praćenja i tumačenja dobivenih rezultata, izvorni oblik ANOVA tablice iz tablice 2.7, u tablici 2.8 prikazan je u dosad korištenim oznakama i obliku prikaza.

Tablica 2.8. ANOVA tablica za modul „nonlinear estimation“

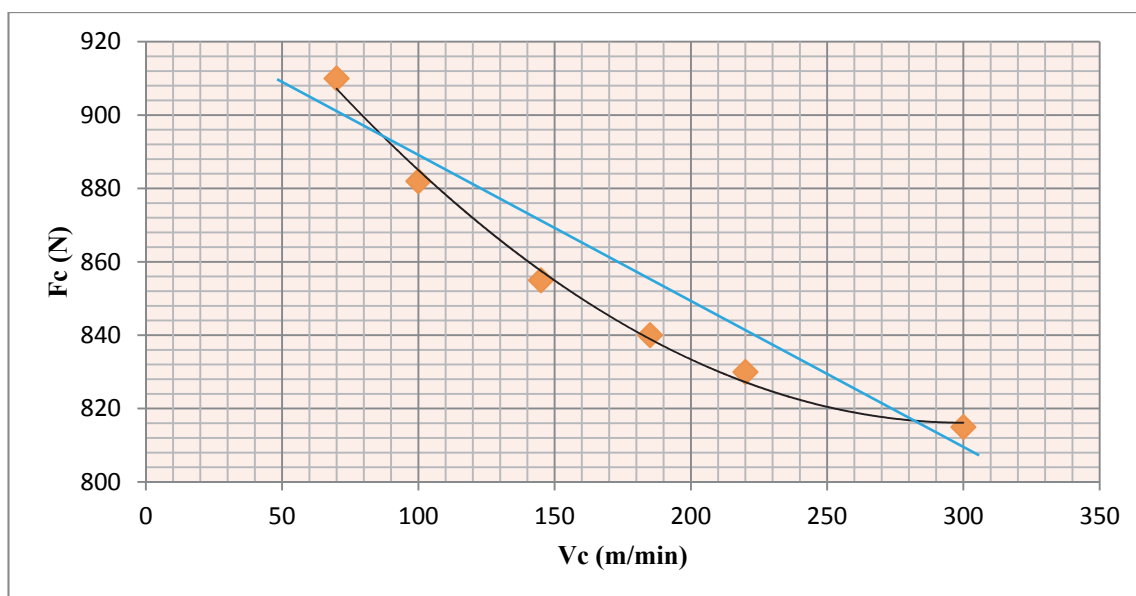
Izvor varijacija	Stupnjevi slobode	Zbroj kvadrata	Sredina kvadrata	Empirijski F-omjer
Protumačeno modelom	$n$	$SKO_{protumačeno} = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$	$\frac{SKO_{protumačeno}}{n}$	$F = \frac{SKO_{protumačeno} / n}{SKO_{ostatka} / (m-n)}$
Ostatak (Ne protumačena odstupanja)	$m-n$	$SKO_{ostatka} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$	$\frac{SKO_{ostatka}}{m-n}$	-
Ukupno	$m$	$SK_{ukupno} = \sum_{i=1}^n (y_i)^2$	-	-

### 3. Eksperimentalni dio

#### 3.1. Cilj i metodologija ispitivanja

U ovom eksperimentu analizira se utjecaj parametara režima obrade (dubine rezanja, posmak i brzina rezanja) na glavnu silu rezanja  $F_c$  kod uzdužnog tokarenja na temelju čega je u radu potrebno utvrditi koji matematički model bolje opisuje stvarni proces odnosno eksperiment. Da li je to matematički model prvog stupnja ili matematički model drugog stupnja. U većini eksperimentalnih istraživanja u procesu obrade odvajanjem čestica kao matematički model odgovara model prvoga stupnja, osobito zapis u eksponencijalnom obliku, dok se u, vrlo rijetkim, ispitivanjima u kojima se očekuje ekstrem koristi model drugog stupnja.

Promatrajući dijagram ovisnosti  $F_c$ - $v_c$  (slika 3.1) vidi se da linija ima oblik polinoma drugog stupnja iz čega se može pretpostaviti da bi model drugog stupnja mogao biti prikladniji kod procesa obrade odvajanjem čestica na alatnim strojevima novije generacije (CNC) koji imaju mogućnost obrade u prikazanom rasponu brzina.



Slika 3.1. Dijagram ovisnosti glavne sile rezanja  $F_c$  o brzini rezanja  $v_c$

Za dobivanje adekvatnog matematičkog modela koristit će se višefaktorski plan pokusa, koji se pokazao optimalnim za istraživanje matematičkih modela koji opisuju zakonitosti u procesu obrade odvajanjem čestica.

Kao ulazne (nezavisne) veličine procesa uzete su:

- Brzina rezanja ( $v_c$ )
- Posmak ( $f$ )
- Dubina rezanja ( $a_p$ )

Za izlaznu veličinu bira se glavna sila rezanja  $F_c$  i polazna funkcija obradivosti:

$$F_c = f(v_c, a_p, f) \quad (3.1)$$

### 3.2. Planiranje i priprema

#### 3.2.1. Stroj

Mjerenja su izvršena na tokarskom obradnom centru Trens SBL-500, proizvedenom 2004 god.



Slika 3.2. Tokarski obradni centar Trens SBL-500 [24]

Tehničke karakteristike tokarskog obradnog centra Trens SBL-500 su: [24]

- Dimenzije: 1738 x 1900 mm (širina x visina)
- Težina: 6620 kg

- Radni prostor:
  - najveća duljina tokarenja: 845 mm
  - najveći promjer tokarenja iznad kliznih staza: 405 mm
- Brzina posmičnih gibanja:
  - radna brzina za X os: 1 ÷ 10 m/min,
  - radna brzina za Z os: 1 ÷ 10 m/min,
  - pozicioniranje za X os: 18 m/min,
  - pozicioniranje za Z os: 24 m/min
- Glavno vreteno:
  - frekvencija vrtnje: 4200 o/min,
  - snaga: 18,5 kW,
  - "C" os za indeksiranje glavnog vretena
- Magazin alata:
  - broj mjesta u revolverskoj glavi (SAUTER): 12 (6+6)
  - prihvrat pogonjenog alata
  - snaga pogonjenih alata: 3,0 kW
  - frekvencija vrtnje: 3500 o/min
- Upravljanje: SIEMENS 810 D SHOPTURN

### 3.2.2. Alat

Za ovo eksperimentalno istraživanje korišten je alat tvrtke Seco Tools GmbH. Izabran je držač oznake DDJNL2525M15 ( $\lambda = -6^\circ$ ) (slika 3.3) i rezna pločica oznake DNMG150608-M3 TP2000 (slika 3.4).



Slika 3.3. Držač DDJNL2525M15 i pločica DNMG150608-M3 [23]

### 3.2.3. Materijal obratka

Obradivani čelik je legirani čelik za poboljšavanje Č5431 (34CrNiMo6), 300 HB, promjera  $D_0 = 112$  mm.

Tablica 3.1. Kemijski sastav materijala 34CrNiMo6 (Č 5431) i tvrdoća nakon poboljšanja

C %	Si %	Mn %	P %	S %	Cu %	Ni %	Cr %	Mo %	Tvrdoća (HB)
0,39	0,16	0,45	0,010	0,018	0,13	1,50	1,46	0,15	300

### 4.2.4. Mjerni instrument

Za mjerenje sile rezanja korišten je trokomponentni mjerač sila tipa 9257B, švicarskog proizvođača "KISTLER". Radi se o električnom mjeraču s piezoelektričnim pretvornikom.

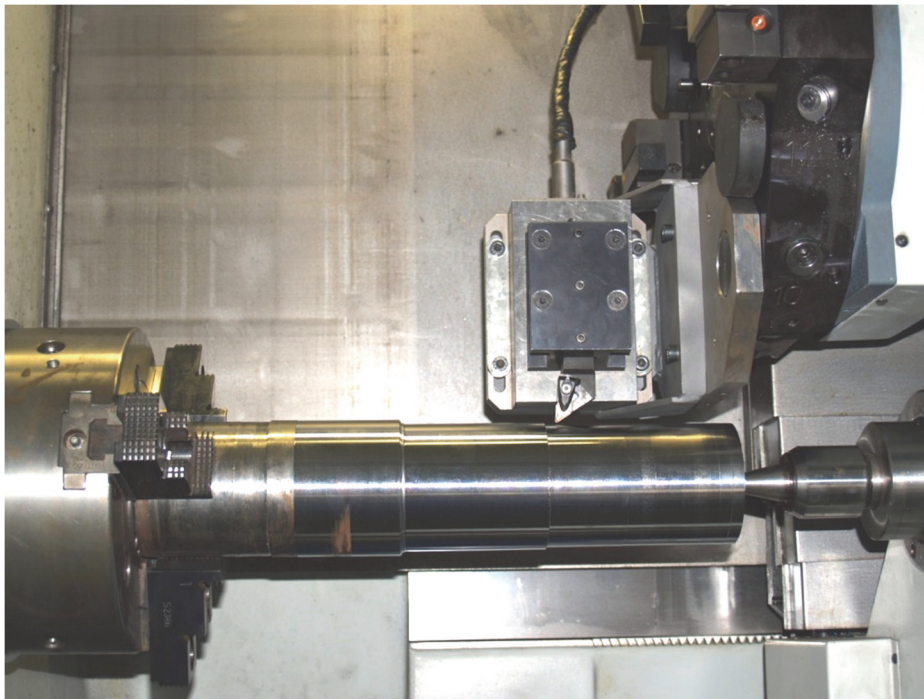
Osnovne karakteristike samog uređaja su: [16]

- područje mjerenja sila:  $\pm 5$  kN
- preopterećenje:  $\pm 7.5$  kN;  $-7.5/15$  kN za  $F_z$
- krutost:  $c_x, c_y > 1$  kN/ $\mu\text{m}$ ;  $c_z > 2$  kN/ $\mu\text{m}$
- temperaturno područje rada:  $0^\circ\text{C} - 70^\circ\text{C}$
- težina: 7.3 kg

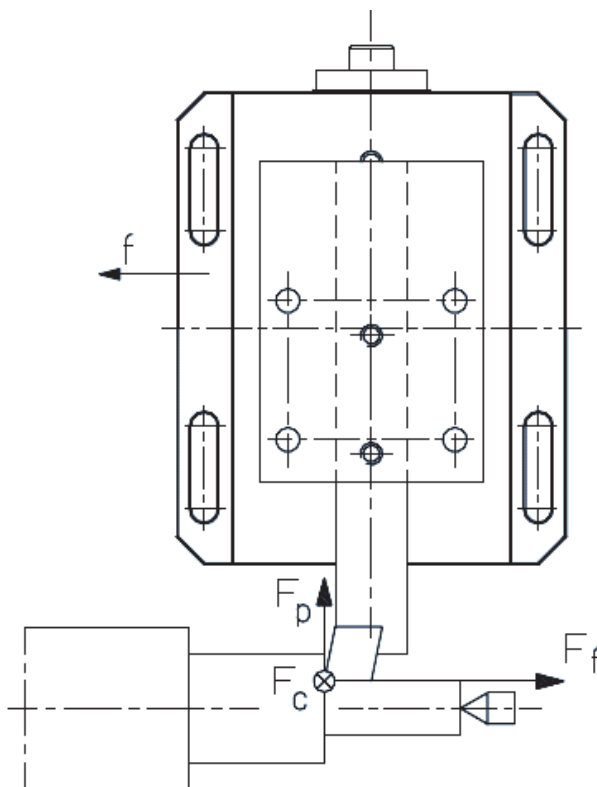
Dinamometar se sastoji od četiri senzora za mjerenje tri komponente sile rezanja, a smješteni su između osnovne ploče i gornje ploče. Svaki senzor sadrži tri para kremenih ploča, jednu osjetljivu na pritisak u smjeru osi  $z$ , a druge dvije odgovaraju na smik u smjeru  $x$  i  $y$  osi. Izlazi iz četiri ugrađena senzora sila su povezana izvan dinamometra u smjeru koji dopušta višekomponentna mjerna oprema. Držalac alata koji se montira na mjerni uređaj može prihvatiti alat s maksimalnim dimenzijama drške  $26 \times 26$  mm.

Slika 3.4 prikazuje mjerni uređaj montiran u radnom prostoru stroja. Slike 3.5 i 3.6 prikazuju shematski prikaz i unutarnju građu mjernog uređaja za mjerenje sila, a na slici 3.7 prikazan je princip rada takvog senzora koji se zasniva na piezoelektričnom efektu kristala kvarca ( $\text{SiO}_2$ ) koji ima svojstvo da kada ga se optereti silom postaje električki nabijen. Mjerenje je relativno jednostavno iz razloga što je zavisnost između sile opterećenja i naboja

linearnog karaktera. Za očitavanje takvog naboja i obradu signala potrebni su pretvornik signala i računalo (slika 3.9).

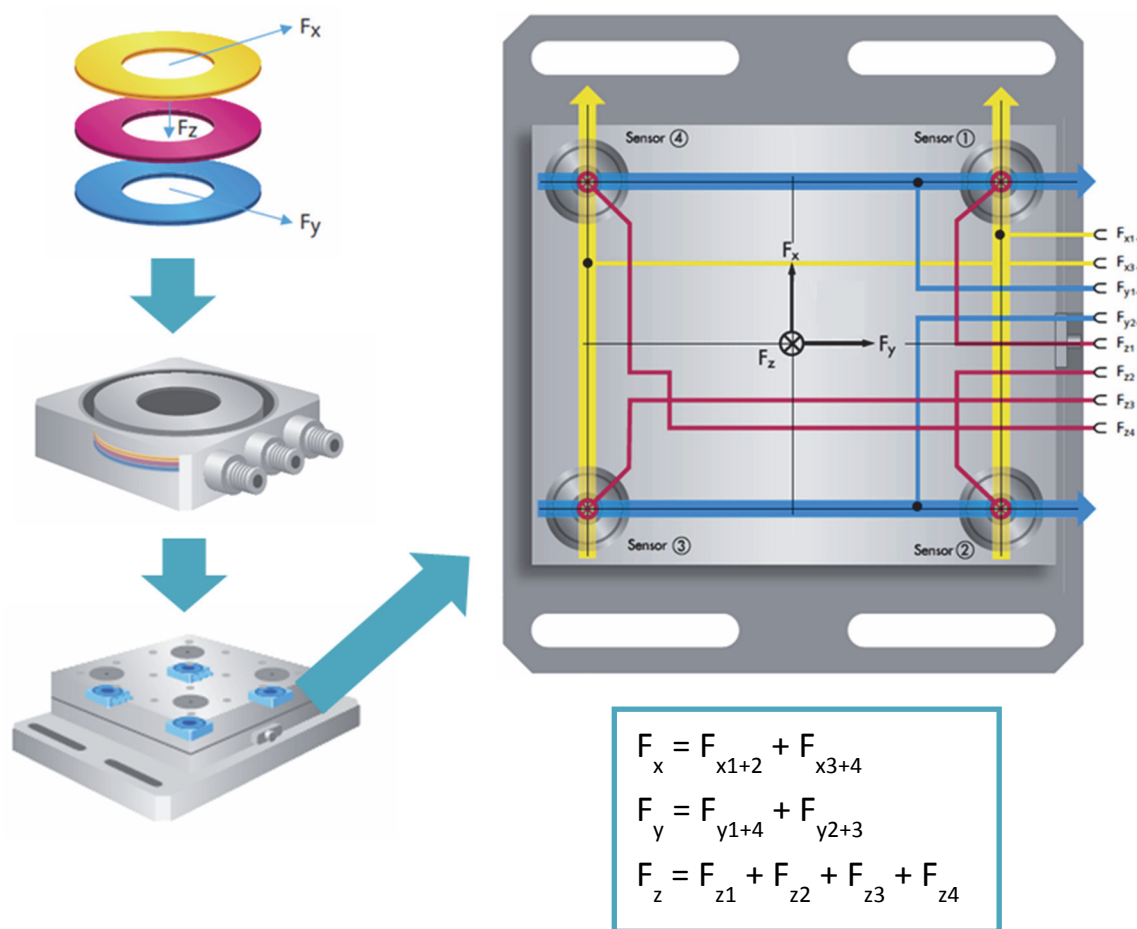


Slika 3.4. Obradak i mjerni uređaj u radnom prostoru stroja

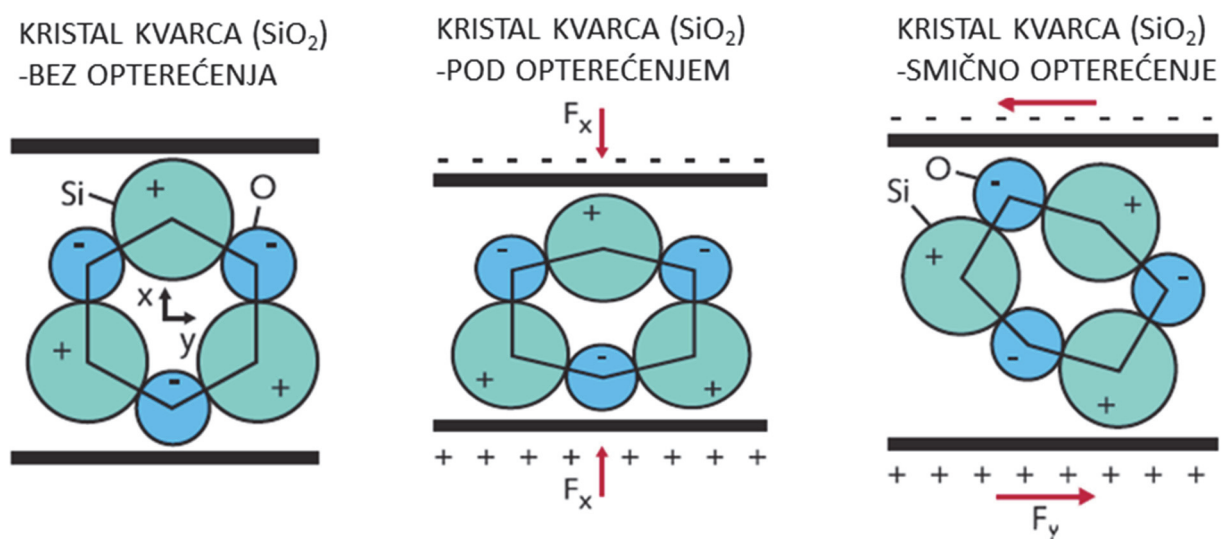


Slika 3.5. Shematski prikaz mjernog uređaja u radnom prostoru stroja [16]



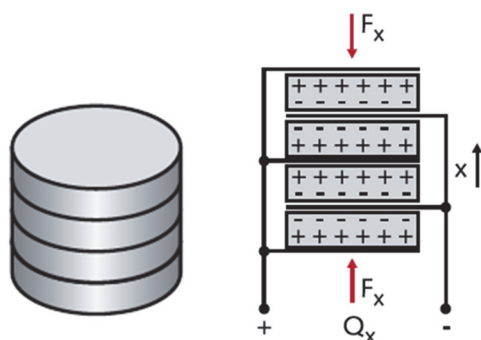


Slika 3.6. Unutarnja građa mjernog uređaja za mjerenje sila [16]



Slika 3.7. Princip rada senzora sila – Piezoelektrični efekt [16]

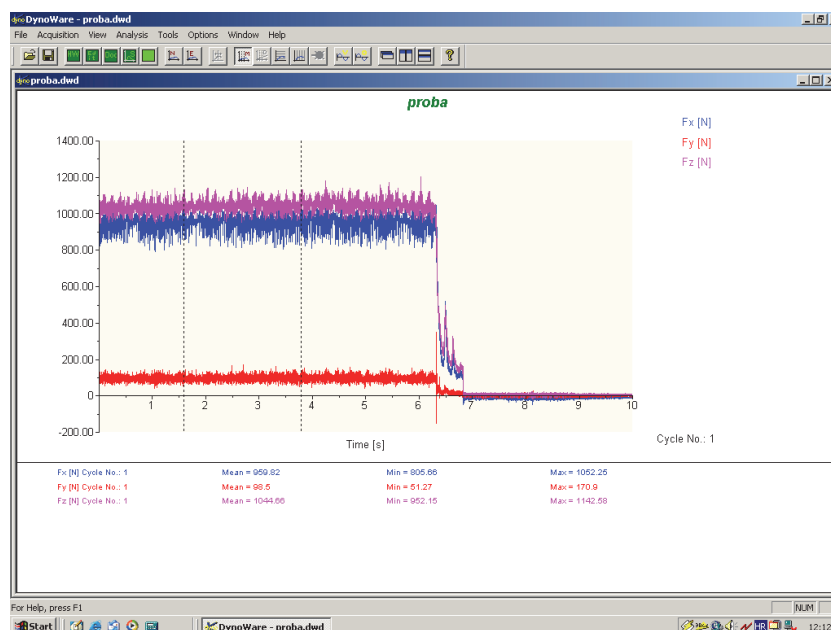
Vrijednosti naboja dobivene apliciranjem pritiska na kristal kvarca su malih iznosa. To se rješava jednostavno ugradnjom više „paralelnih“ kristala kvarca u obliku diskova. Princip rada i razmještaj takvih diskova prikazan je na slici 3.8.



Slika 3.8. Diskovi kvarca – bez opterećenja i pod opterećenjem [16]



Slika 3.9. Pretvornik signala



Slika 3.10. Korisničko sučelje



### 3.3. Rezultati

#### 3.3.1. Model prvog stupnja - eksponencijalni model - za prošireni plan pokusa

Prije izvođenja eksperimenta potrebno je izraditi tablicu razine variranja faktora (tablica 3.2) i tablicu matrice plana pokusa (tablica 3.3).

Tablica 3.2. Razine variranja faktora za matematički model prvog stupnja

Faktori	$f_{i,min}$	$f_{i,sr}$	$f_{i,max}$
$v_c$ [m/min]	70	185	300
$a_p$ [mm]	1	1,75	2,5
$f$ [mm]	0,14	0,2	0,28
Kod faktora	-1	0	1

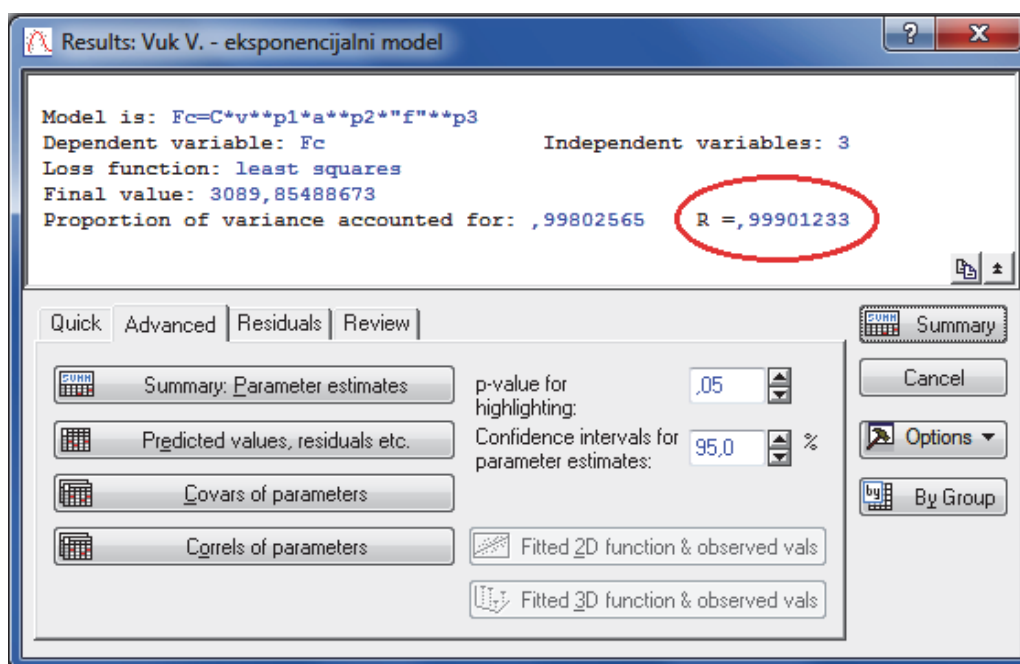
Tablica 3.3. Matrica za plan pokusa prvog stupnja

Redni broj mjerenja	Ulazni faktori			Izlazni faktor
	$v_c$ [m/min]	$a_p$ [mm]	$f$ [mm]	$F_c$ [N]
1	70	1	0,14	440
2	300	1	0,14	395
3	70	2,5	0,14	992
4	300	2,5	0,14	874
5	70	1	0,28	716
6	300	1	0,28	647
7	70	2,5	0,28	1690
8	300	2,5	0,28	1492
9	185	1,75	0,2	840
10	185	1,75	0,2	831
11	185	1,75	0,2	849
12	185	1,75	0,2	839
13	70	1,75	0,2	910
14	300	1,75	0,2	815

Polazna jednažba, za glavnu silu rezanja, kod plana pokusa prvog reda glasi:

$$F_c = C \cdot v_c^{p_1} \cdot a_p^{p_2} \cdot f^{p_3} \quad (3.2)$$

Podaci dobiveni pokusom obrađeni su u programskom paketu Statsoft Statistica v10.0.1011. Rezultati obrade podataka prikazani su u tablici 3.4. te na slici 3.11.



Slika 3.11. Rezultati obrade podataka – eksponencijalni model

Koeficijent korelacije za eksponencijalni model iznosi:  $r = 0,99901233$ .

Tablica 3.4. Vrijednosti parametara eksponencijalnog modela za glavnu silu rezanja  $F_c$

	Procjena	Standardna greška	t - vrijednost	Razina signifikantnosti (p)
$C_1$	2767,105	140,3218	19,7197	0,000000
$p_1$	-0,086	0,0077	-11,0998	0,000001
$p_2$	0,931	0,0177	52,6488	0,000000
$p_3$	0,776	0,0198	39,1706	0,000000

Pošto razina signifikantnosti niti za jedan parametar nije prešla prag signifikantnosti  $\alpha=0.05$  zaključuje se da su svi članovi modela signifikantni što znači da je u konačni izraz potrebno uvrstiti sve članove.

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u matematički model dobiva se konačni izraz za traženu vrijednost glavne sile rezanja  $F_c$ :

$$F_c = 2767,105 \cdot v_c^{(-0,086)} \cdot a_p^{0,931} \cdot f^{0,776} \quad (3.3)$$

Test adekvatnosti modela proveden je pomoću analize varijance (ANOVA). Iz tablice 3.5 može se vidjeti da je model adekvatan.

Tablica 3.5. Analiza varijance za eksponencijalni model

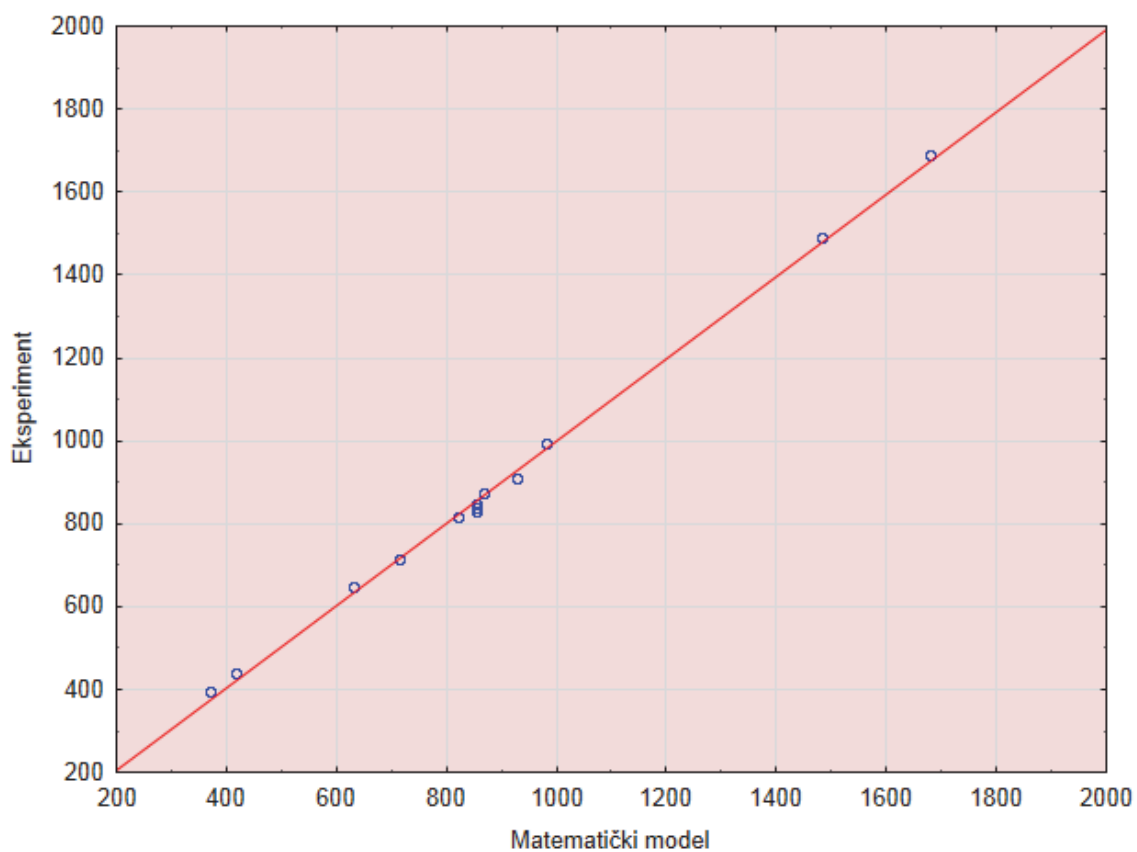
Izvor varijabilnosti	Suma kvadrata	Stupnjevi slobode	Srednji kvadrat	F-vrijednost	Razina adekvatnosti (p)
Model	12421112	4,00000	3105278	10049,92	0,000000
Ostatak	3090	10,00000	309		
Ukupno	12424202	14,00000			

Tablica 3.6 prikazuje usporedbu rezultata dobivenih eksperimentom i rezultata dobivenih matematičkim modelom. Razlika između tih vrijednosti naziva se ostatak čija vrijednost bi trebala biti što manja.

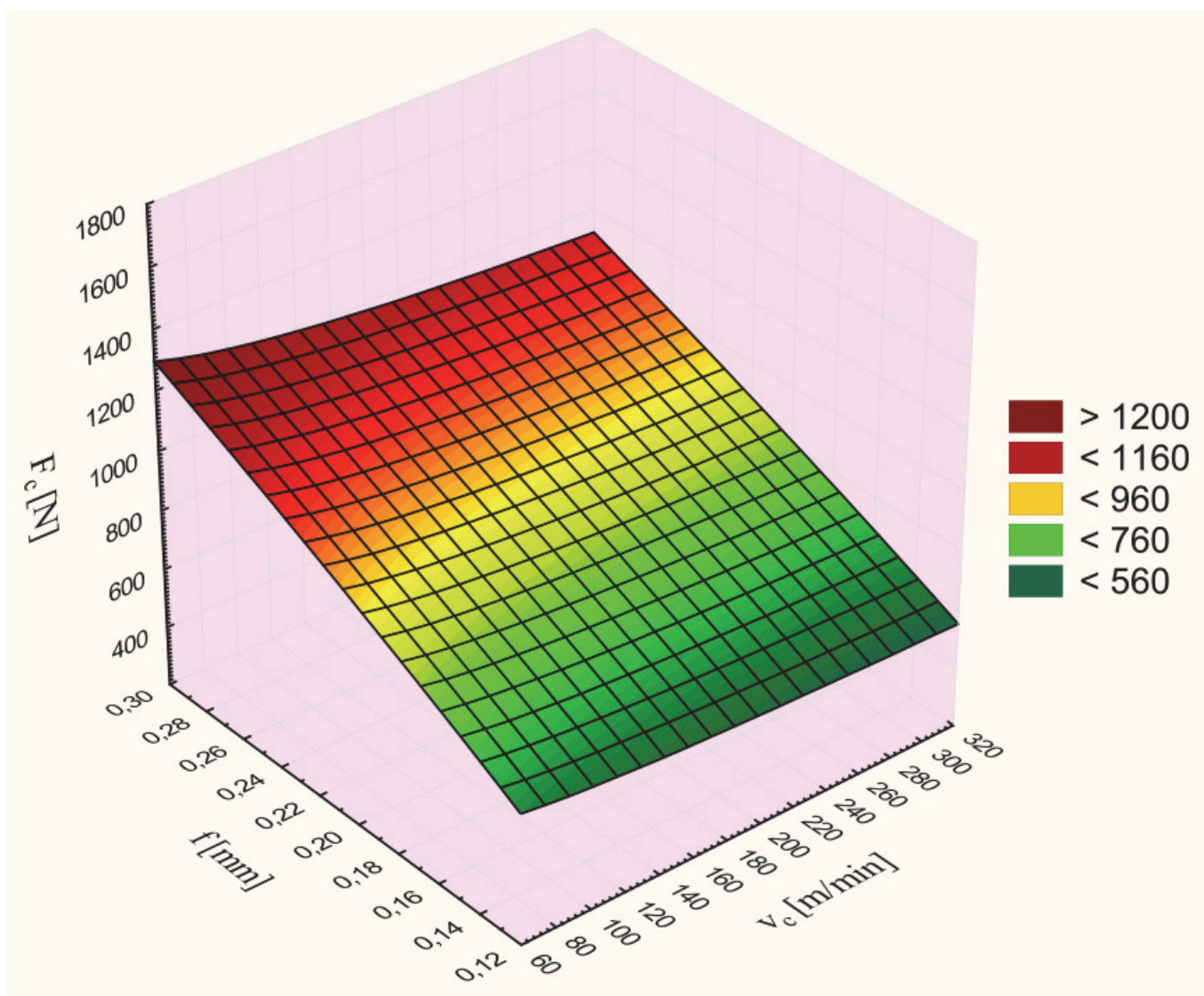
Tablica 3.6. Eksperimentalni rezultati, rezultati modela i ostatak

	Eksperiment	Model	Ostatak
1	440,000	418,261	21,7386
2	395,000	369,180	25,8200
3	992,000	981,850	10,1504
4	874,000	866,633	7,3667
5	716,000	716,056	-0,0561
6	647,000	632,030	14,9703
7	1690,000	1680,909	9,0909
8	1492,000	1483,661	8,3391
9	840,000	854,549	-14,5491
10	831,000	854,549	-23,5491
11	849,000	854,549	-5,5491
12	839,000	854,549	-15,5491
13	910,000	928,836	-18,8358
14	815,000	819,840	-4,8404

Dijagram na slici 3.12 grafički je prikaz razlike rezultata eksperimenta i matematičkog modela:

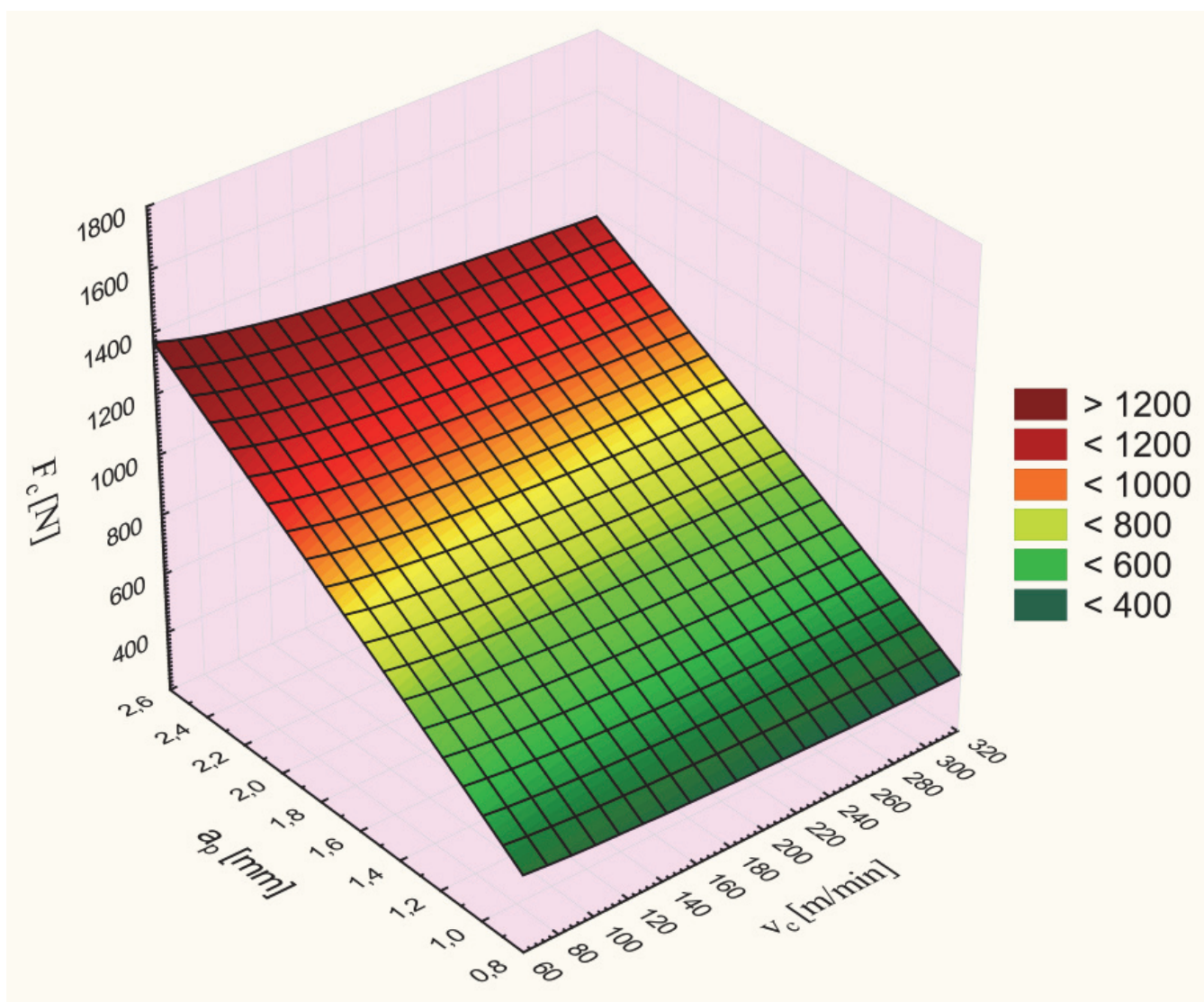


Slika 3.12. Dijagram usporedbe rezultata eksperiment – model



Slika 3.13. Dijagram ovisnosti  $F_c = f(f, v_c)$  za  $a_p = 1,75$  mm

Iz dijagrama na slici 3.13 može se vidjeti da je najveći iznos sile rezanja pri velikim posmacima i malim brzinama rezanja, dok je najmanji iznos pri velikim brzinama rezanja i malim posmacima.



Slika 3.14. Dijagram ovisnosti  $F_c = f(a_p, v_c)$  za  $f = 0,2 \text{ mm}$

Dijagram na slici 3.14 pokazuje da promjena glavne sile rezanja najviše ovisi o dubini rezanja ( $a_p$ ) i to tako da se povećavanjem dubine rezanja povećava i glavna sila rezanja. U ovom slučaju s povećanjem brzine rezanja dolazi do malog pada glavne sile rezanja.

### 3.3.2. Model drugog stupnja za prošireni plan pokusa

Tablica 3.7. Nepotpuna matrica plana pokusa drugog stupnja

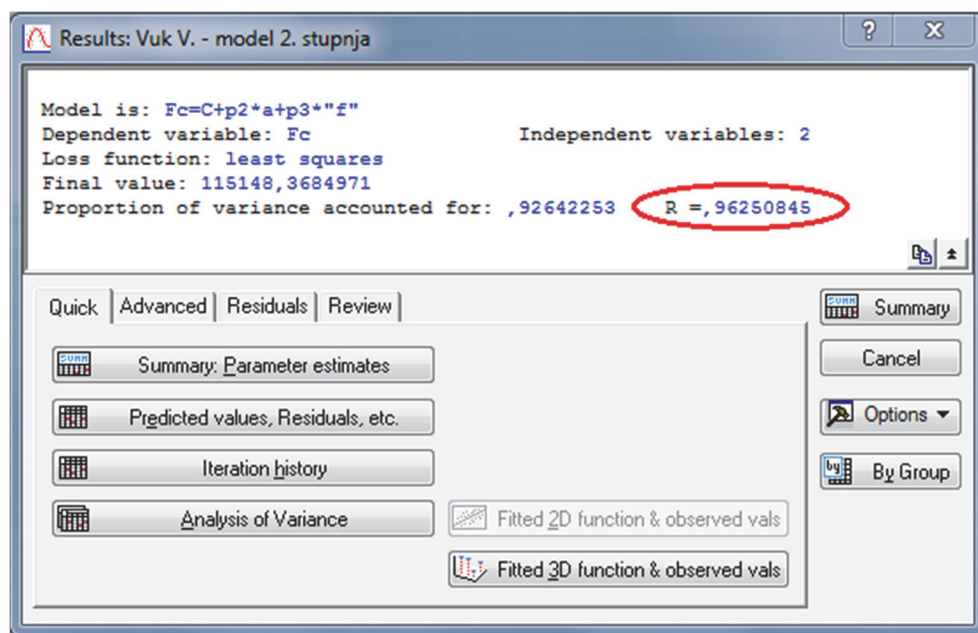
Redni broj mjerenja	Ulazni faktori			Izlazni faktor
	$v_c$ [m/min]	$a_p$ [mm]	$f$ [mm]	$F_c$ [N]
1	70	1	0,14	440
2	300	1	0,14	395
3	70	2,5	0,14	992
4	300	2,5	0,14	874
5	70	1	0,28	716
6	300	1	0,28	647
7	70	2,5	0,28	1690
8	300	2,5	0,28	1492
9	185	1,75	0,2	840
10	185	1,75	0,2	831
11	185	1,75	0,2	849
12	185	1,75	0,2	839
13	70	1,75	0,2	910
14	300	1,75	0,2	815

Polazna jednačba za glavnu silu rezanja, kod plana pokusa drugog reda glasi: [12]

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 \quad (3.4)$$

Slijedi obrada podataka u programskom paketu Statsoft Statistica v10.0.1011. i eliminacija članova koji imaju vrijednost  $p > 0,05$ .





Slika 3.15. Rezultati obrade podataka – model 2. stupnja

Rezultati obrade podataka u programskom paketu Statistica prikazani su na slici 3.15 i u tablici 3.8.

Koeficijent korelacije za model 2. stupnja iznosi:  $r = 0,96250845$ .

Tablica 3.8. Vrijednosti parametara modela 2. stupnja za glavnu silu rezanja  $F_c$ 

	Procjena	Standardna greška	t - vrijednost	Razina signifikantnosti (p)
C	-632,470	138,1108	-4,57944	0,000791
p <sub>2</sub>	475,000	48,2310	9,84844	0,000001
p <sub>3</sub>	3314,957	514,5156	6,44287	0,000048

Konačni oblik modela drugog stupnja prikazan je jednadžbom 3.5.

$$F_c = C + p_2 \cdot a_p + p_3 \cdot f \quad (3.5)$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti (tablica 3.8) u matematički model dobiva se konačni izraz za traženu vrijednost glavne sile rezanja  $F_c$ :

$$F_c = -632,47 + 475 \cdot a_p + 3314,957 \cdot f \quad (3.6)$$



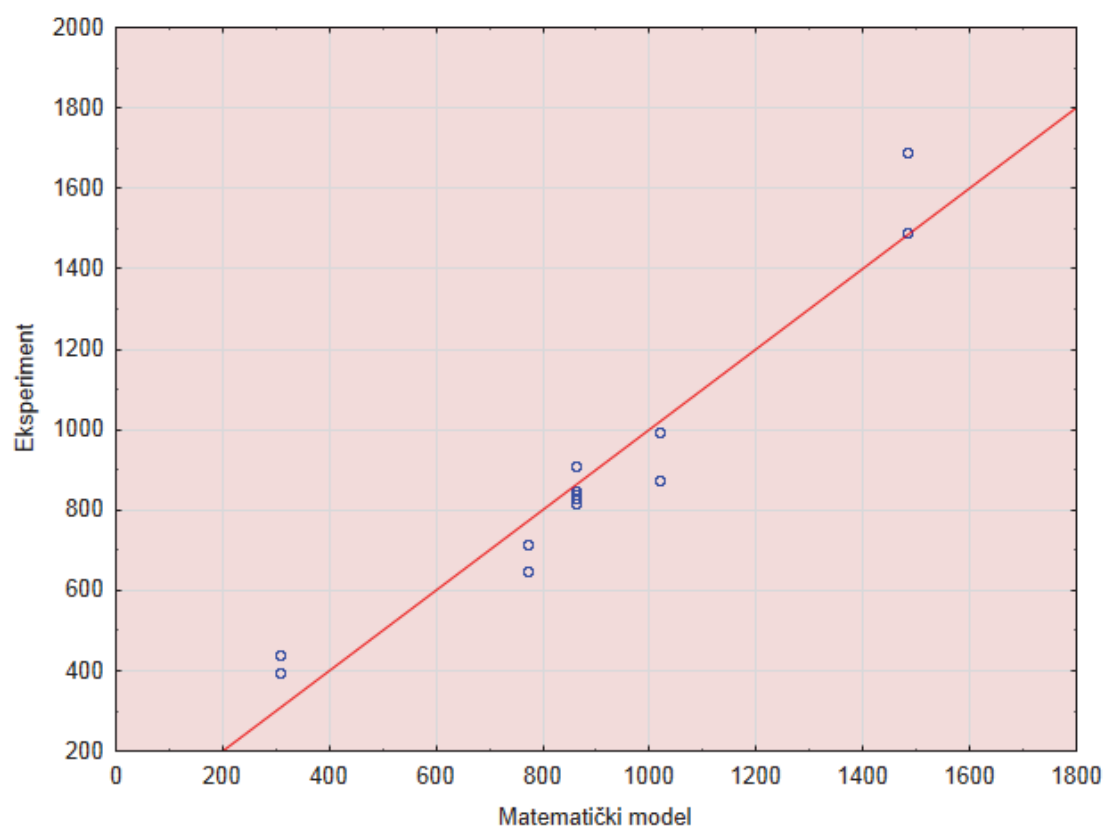
Test adekvatnosti modela proveden je pomoću analize varijance (ANOVA). Iz tablice 3.9 može se vidjeti da je model adekvatan.

Tablica 3.9. Analiza varijance za model 2. stupnja

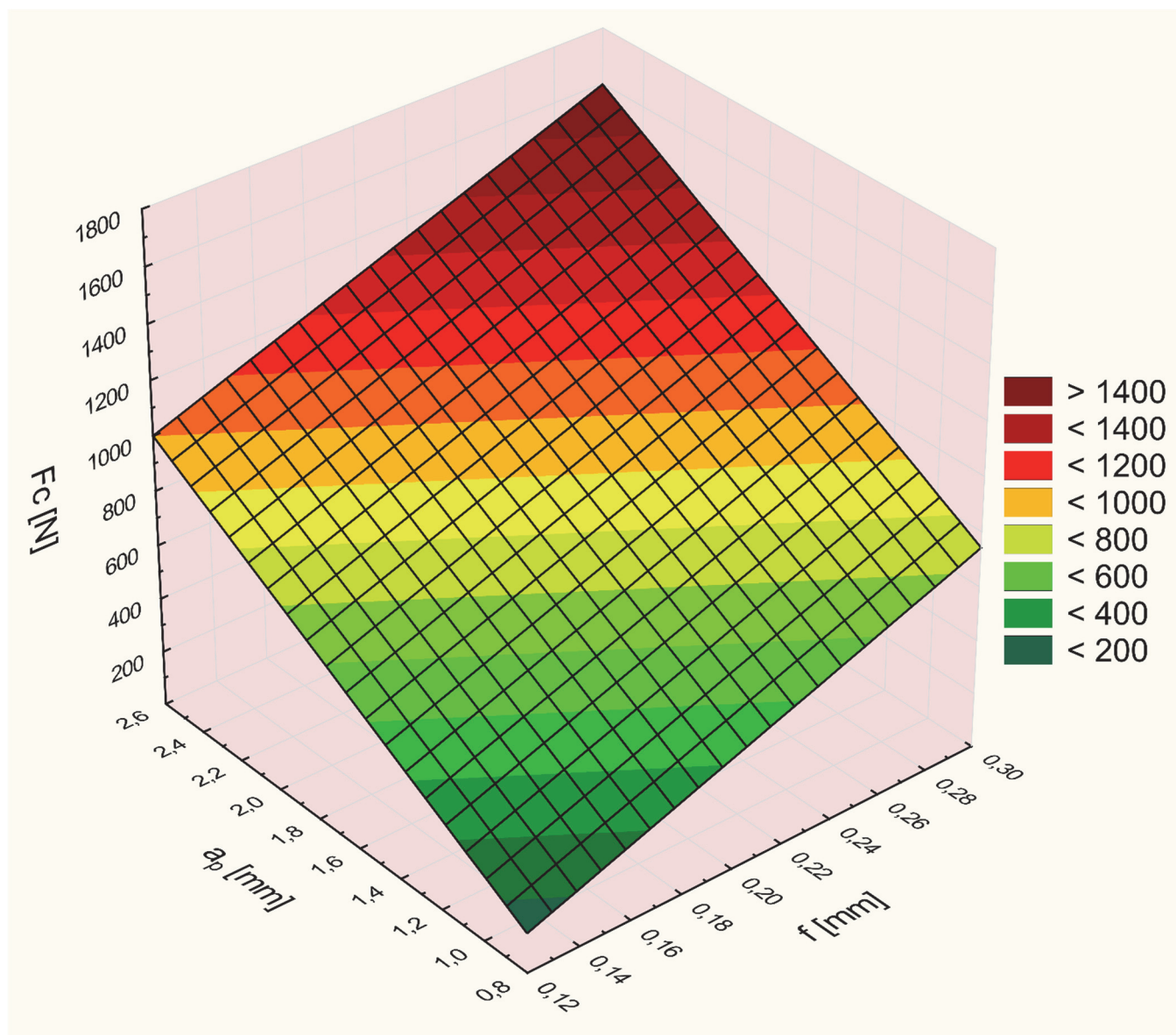
Izvor varijabilnosti	Suma kvadrata	Stupnjevi slobode	Srednji kvadrat	F-vrijednost	Razina adekvatnosti
Model	12309054	3,00000	4103018	391,9569	0,000000
Ostatak	115148	11,00000	10468		
Ukupno	12424202	14,00000			

Tablica 3.10. Eksperimentalni rezultati, rezultati modela i ostatak

	Eksperiment	Model	Ostatak
1	440,000	306,624	133,376
2	395,000	306,624	88,376
3	992,000	1019,124	-27,124
4	874,000	1019,124	-145,124
5	716,000	770,718	-54,718
6	647,000	770,718	-123,718
7	1690,000	1483,218	206,782
8	1492,000	1483,218	8,782
9	840,000	861,772	-21,772
10	831,000	861,772	-30,772
11	849,000	861,772	-12,772
12	839,000	861,772	-22,772
13	910,000	861,772	48,228
14	815,000	861,772	-46,772



Slika 3.16. Dijagram usporedbe rezultata eksperiment – model



Slika 3.17. Dijagram ovisnosti  $F_c = f(a_p, f)$

Na slici 3.17 vidi se ovisnost glavne sile rezanja o dubini obrade i posmaku. Iz dijagrama je vidljivo da je najveći iznos glavne sile rezanja pri maksimalnoj dubini rezanja i pri maksimalnom posmaku.

### 3.3.3. Analiza rezultata eksponencijalnog modela i modela drugog stupnja

Iz tablica 3.5 i 3.9 proizlazi da su i eksponencijalni model i model 2. stupnja adekvatni. Međutim, eksponencijalni model bolje opisuje eksperiment jer ima veći koeficijent korelacije  $r$ .

$$r_{\text{model 2. stupnja}} < r_{\text{eksponencijalni model}} \quad (3.7)$$

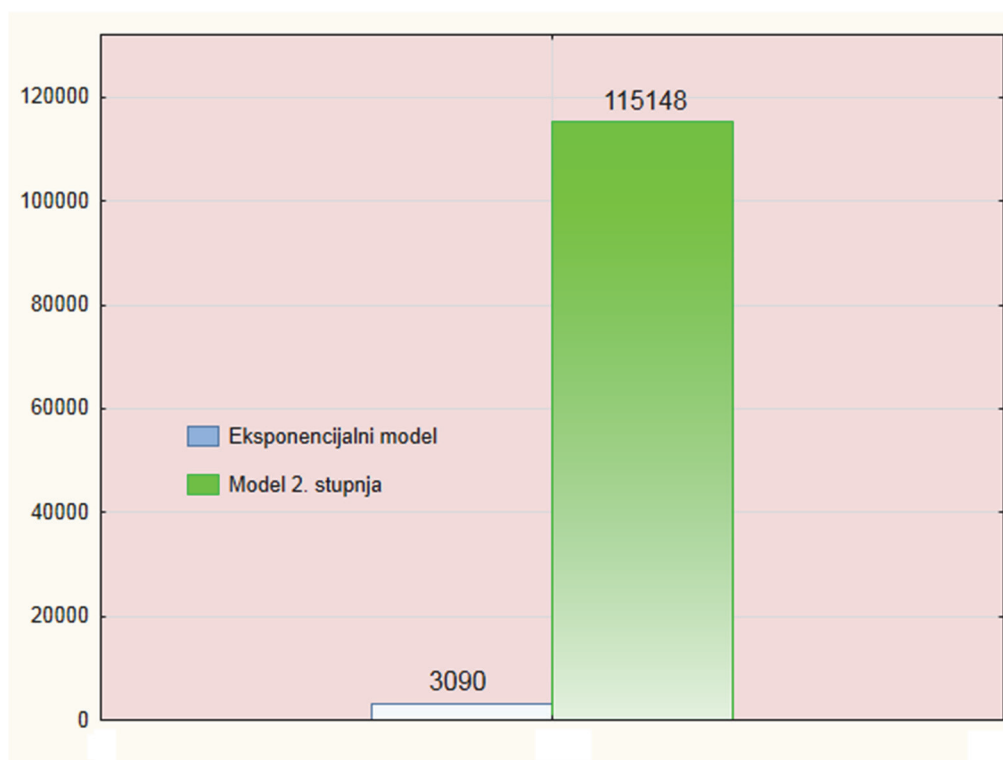
$$0,96250845 < 0,99901233$$

Osim koeficijenta korelacije kao veličine pomoću koje možemo usporediti dva modela i ocijeniti koji model bolje opisuje eksperiment, to je moguće učiniti i preko suma kvadrata odstupanja izračunatih u tabelama analize varijance:

$$SKO_{\text{ostatka}} (\text{eksponencijalni model}) < SKO_{\text{ostatka}} (\text{model 2. stupnja}) \quad (3.8)$$

$$3090 < 115148$$

Iz tih veličina vidljivo je da eksponencijalni model bolje opisuje eksperiment jer su vrijednost ostatka, odnosno razlike između dobivenih vrijednosti eksperimentom i dobivenih vrijednosti modelom, puno manje nego kod modela drugog stupnja bez interakcija.



Slika 3.18. Grafički prikaz vrijednosti sume kvadrata ostataka

### 3.3.4. Plan pokusa sa ponavljanjem u centru

Tablica 3.11. Matrica plana pokusa sa ponavljanjem u centru

Redni broj mjerenja	Ulazni faktori			Izlazni faktor
	$v_c$ [m/min]	$a_p$ [mm]	$f$ [mm]	$F_c$ [N]
1	70	1	0,14	440
2	300	1	0,14	395
3	70	2,5	0,14	992
4	300	2,5	0,14	874
5	70	1	0,28	716
6	300	1	0,28	647
7	70	2,5	0,28	1690
8	300	2,5	0,28	1492
9	185	1,75	0,2	840
10	185	1,75	0,2	831
11	185	1,75	0,2	849
12	185	1,75	0,2	839

#### 3.3.4.1. Polinom prvog stupnja – modul „Multiple regression“

Polazna jednadžba, za glavnu silu rezanja, kod plana pokusa za polinom prvog reda glasi:

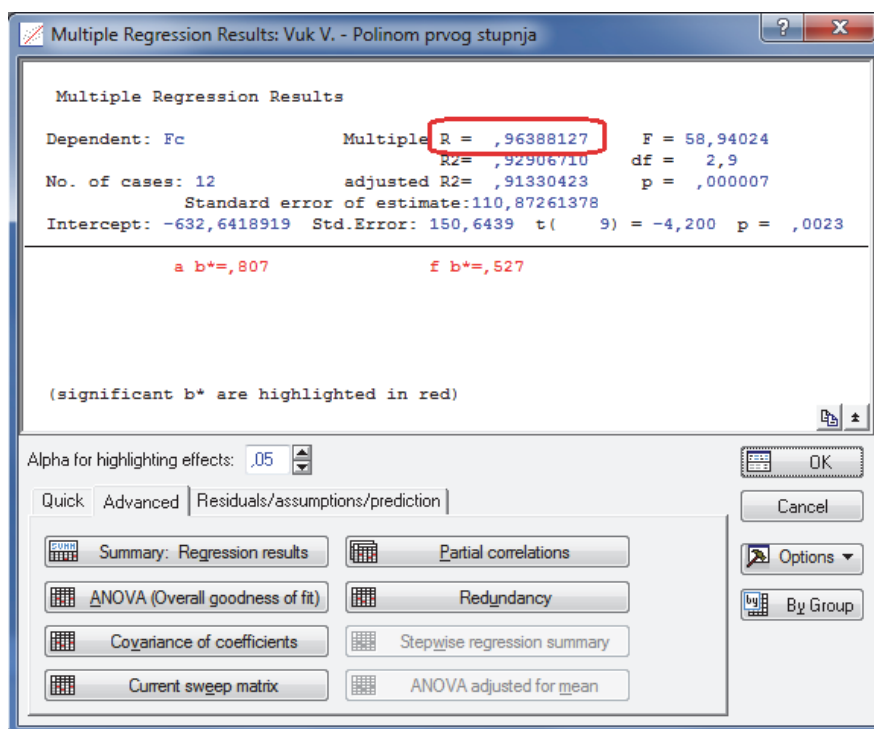
$$F_c = C + p_1 \cdot v_c + p_2 \cdot a_p + p_3 \cdot f \quad (3.9)$$

Slijedi obrada podataka u programskom paketu Statsoft Statistica v10.0.1011.

Tablica 3.12. Vrijednosti svih parametara polinoma prvog stupnja za glavnu silu rezanja  $F_c$

	Procjena	Standardna greška	t - vrijednost	Razina signifikantnosti (p)
C	-546,175	154,0644	-3,54511	0,007563
$p_1$	-0,467	0,3216	-1,45348	0,184164
$p_2$	475,000	49,3069	9,63354	0,000011
$p_3$	3315,203	526,5004	6,29668	0,000234

Iz tablice 3.12 vidljivo je da razina signifikantnosti koeficijenta  $p_1$  iznosi 0,0184164. Pošto je ta vrijednost veća od zadane razine signifikantnosti  $p=0,05$  slijedi eliminacija člana i ponovna obrada rezultata bez tog člana.



Slika 3.19. Rezultati obrade podataka – Polinom prvog stupnja

Rezultati obrade podataka u programskom paketu Statistica prikazani su na slici 3.19 i u tablici 3.13.

Koeficijent korelacije za polinom prvog stupnja iznosi:  $r = 0,96388127$ .

Tablica 3.13. Vrijednosti parametara polinoma prvog stupnja za glavnu silu rezanja  $F_c$ 

	Procjena	Standardna greška	t - vrijednost	Razina signifikantnosti (p)
C	-632,642	150,6439	-4,19959	0,002308
p <sub>2</sub>	475,000	52,2659	9,08815	0,000008
p <sub>3</sub>	3315,203	558,0962	5,94020	0,000218

Konačni oblik modela drugog stupnja prikazan je jednadžbom (3.10).

$$F_c = C + p_2 \cdot a_p + p_3 \cdot f \quad (3.10)$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti (tablica 3.13) u matematički model dobiva se konačni izraz za traženu vrijednost glavne sile rezanja  $F_c$ :

$$F_c = -632,642 + 475 \cdot a_p + 3315,203 \cdot f \quad (3.11)$$

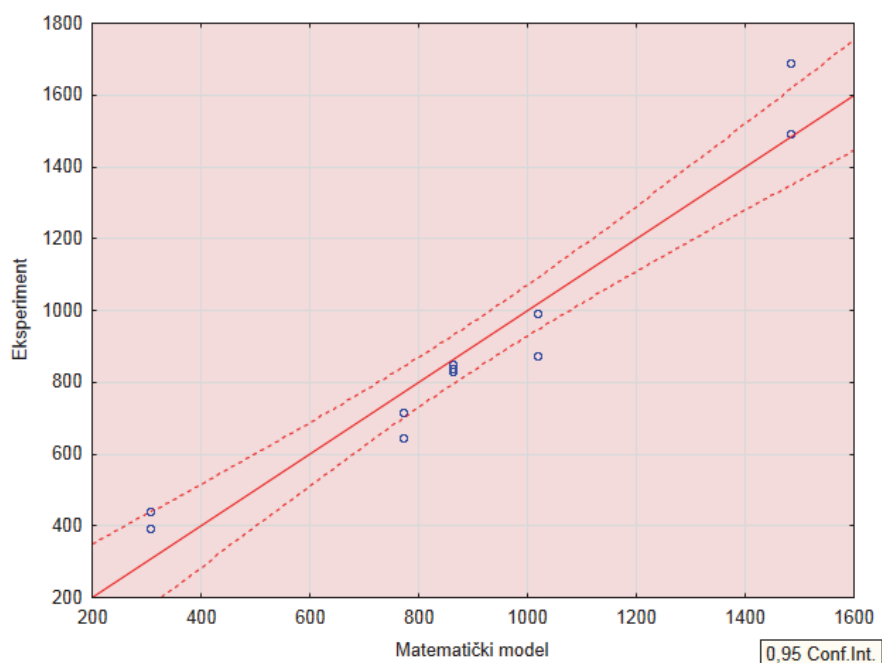
Test adekvatnosti modela proveden je pomoću analize varijance (ANOVA). Programski paket Statistica (modul „Multiple regression“) nije posebno tretirao ponavljanje u centru (kao da ga nema). Iz tablice 3.14 može se vidjeti da je model adekvatan.

Tablica 3.14. Analiza varijance za polinom prvog stupnja

Izvor varijabilnosti	Suma kvadrata	Stupnjevi slobode	Srednji kvadrat	F-vrijednost	Razina adekvatnosti
Model	1449074	2	724536,8	58,94024	0,000007
Ostatak	110635	9	12292,7		
Ukupno	1559708				

Tablica 3.15. Eksperimentalni rezultati, rezultati modela i ostatak

	Eksperiment	Model	Ostatak
1	440,000	306,487	133,514
2	395,000	306,487	88,514
3	992,000	1018,987	-26,987
4	874,000	1018,987	-144,987
5	716,000	770,615	-54,615
6	647,000	770,615	-123,615
7	1690,000	1483,115	206,885
8	1492,000	1483,115	8,885
9	840,000	861,649	-21,649
10	831,000	861,649	-30,649
11	849,000	861,649	-12,649
12	839,000	861,649	-22,649



Slika 3.20. Dijagram usporedbe rezultata eksperiment – model

### 3.3.4.2. Polinom prvog stupnja – modul „Experimental design (DOE)“

Polazna jednačba, za glavnu silu rezanja, kod plana pokusa za polinom prvog reda glasi:

$$F_c = C + p_1 \cdot v_c + p_2 \cdot a_p + p_3 \cdot f \quad (3.12)$$

Slijedi obrada podataka u programskom paketu Statsoft Statistica v10.0.1011.

Factor	SS	df	MS	F	p
(1)v	23112	1	23112	426.04	0.000249
(2)a	1015312	1	1015312	18715.44	0.000001
(3)f	433761	1	433761	7995.60	0.000003
Lack of Fit	87359	5	17472	322.06	0.000272
Pure Error	163	3	54		
Total SS	1559708	11			

Slika 3.21. Rezultati obrade podataka

Programski paket Statistica (modul „Eksperimental design (DOE)“) računa grešku centra kao mjerodavnu za ocjenu signifikantnosti i adekvatnosti.

Koeficijent korelacije za polinom prvog stupnja iznosi:  $r = \sqrt{0,94389} = 0,97154$ .

Tablica 3.16. Vrijednosti parametara polinoma prvog stupnja za glavnu silu rezanja  $F_c$

	Procjena	Standardna greška	t - vrijednost	Razina signifikantnosti (p)
C	-546,175	10,84896	-50,3435	0,000017
p1	-0,467	0,02264	-20,6407	0,000249
p2	475,000	3,47211	136,8044	0,000001
p3	3315,203	37,07530	89,4181	0,000003

Iz tablice 3.16 vidljivo je da su svi parametri signifikantni. Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u matematički model dobiva se konačni izraz za traženu vrijednost glavne sile rezanja  $F_c$ :



$$F_c = -546,175 - 0,467 \cdot v_c + 475 \cdot a_p + 3315,203 \cdot f \quad (3.13)$$

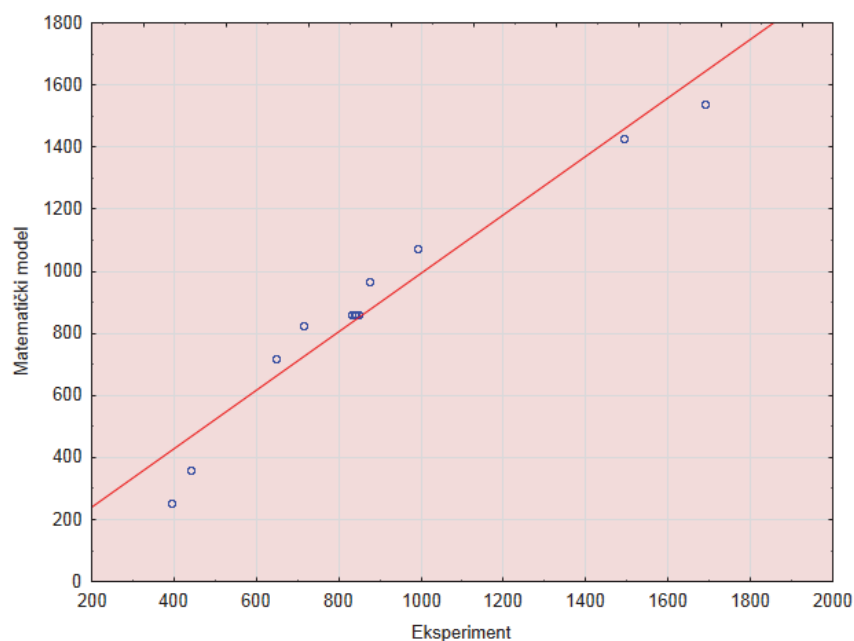
Test adekvatnosti modela proveden je pomoću analize varijance (ANOVA). Iz tablice 3.17 može se vidjeti da je model adekvatan.

Tablica 3.17. Analiza varijance za polinom prvog stupnja

Izvor varijabilnosti	Suma kvadrata	Stupnjevi slobode	Srednji kvadrat	F-vrijednost	Razina adekvatnosti
Ostatak bez centra	87359	5	17472	322,06	0,000272
Greška centra	163	3	54		
Ukupno	1559708	11			

Tablica 3.18. Eksperimentalni rezultati, rezultati modela i ostatak

	Eksperiment	Model	Ostatak
1	440,000	360,236	79,764
2	395,000	252,736	142,264
3	992,000	1072,736	-80,736
4	874,000	965,236	-91,236
5	716,000	824,365	-108,365
6	647,000	716,865	-69,865
7	1690,000	1536,865	153,135
8	1492,000	1429,365	62,635
9	840,000	861,649	-21,649
10	831,000	861,649	-30,649
11	849,000	861,649	-12,649
12	839,000	861,649	-22,649



Slika 3.22. Dijagram usporedbe rezultata eksperiment – model

### 3.3.5. Plan pokusa bez ponavljanja u centru

Tablica 3.19. Matrica za plan pokusa za polinom prvog stupnja

Redni broj mjerenja	Ulazni faktori			Izlazni faktor
	$v_c$ [m/min]	$a_p$ [mm]	$f$ [mm]	$F_c$ [N]
1	70	1	0,14	440
2	300	1	0,14	395
3	70	2,5	0,14	992
4	300	2,5	0,14	874
5	70	1	0,28	716
6	300	1	0,28	647
7	70	2,5	0,28	1690
8	300	2,5	0,28	1492

#### 3.3.5.1. Polinom prvog stupnja – modul „Multiple regression“

Polazna jednačba, za glavnu silu rezanja, kod plana pokusa za polinom prvog reda glasi:

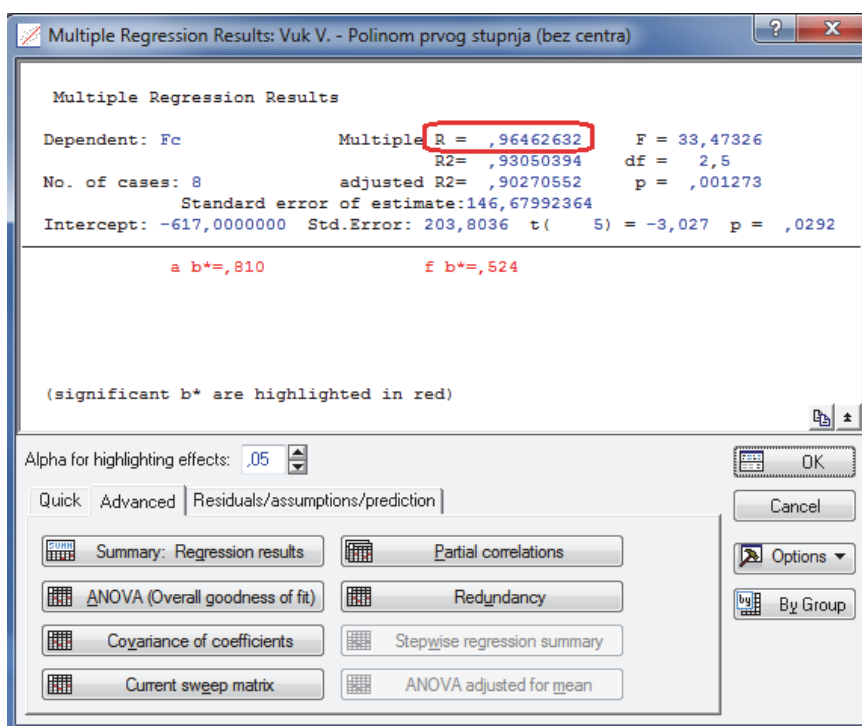
$$F_c = C + p_1 \cdot v_c + p_2 \cdot a_p + p_3 \cdot f \quad (3.14)$$

Slijedi obrada podataka u programskom paketu Statsoft Statistica v10.0.1011.

Tablica 3.20. Vrijednosti svih parametara polinoma prvog stupnja za glavnu silu rezanja  $F_c$

	Procjena	Standardna greška	t - vrijednost	Razina signifikantnosti (p)
C	-530,533	218,1640	-2,43181	0,071841
p <sub>1</sub>	-0,467	0,4467	-1,04622	0,354515
p <sub>2</sub>	475,000	68,5008	6,93422	0,002271
p <sub>3</sub>	3292,857	733,9373	4,48656	0,010935

Iz tablice 3.17 vidljivo je da razina signifikantnosti koeficijenta  $p_1$  iznosi 0,354515. Pošto je ta vrijednost veća znatno od zadane razine signifikantnosti  $p=0,05$  slijedi eliminacija samo tog člana (bez eliminacije člana  $C$ ) i ponovna obrada podataka.



Slika 3.23. Rezultati obrade podataka – Polinom prvog stupnja

Rezultati obrade podataka u programskom paketu Statistica prikazani su na slici 3.23 i u tablici 3.18.

Koeficijent korelacije za polinom prvog stupnja iznosi:  $r = 0,96462632$ .

Tablica 3.21. Vrijednosti parametara polinoma prvog stupnja za glavnu silu rezanja  $F_c$ 

	Procjena	Standardna greška	t - vrijednost	Razina signifikantnosti (p)
C	-617,000	203,8036	-3,02742	0,029167
p <sub>2</sub>	475,000	69,1456	6,86956	0,001000
p <sub>3</sub>	3292,857	740,8455	4,44473	0,006735

Konačni oblik modela drugog stupnja prikazan je jednadžbom (3.15).

$$F_c = C + p_2 \cdot a_p + p_3 \cdot f \quad (3.15)$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti (tablica 3.18) u matematički model dobiva se konačni izraz za traženu vrijednost glavne sile rezanja  $F_c$ :

$$F_c = -617 + 475 \cdot a_p + 3292,857 \cdot f \quad (3.16)$$

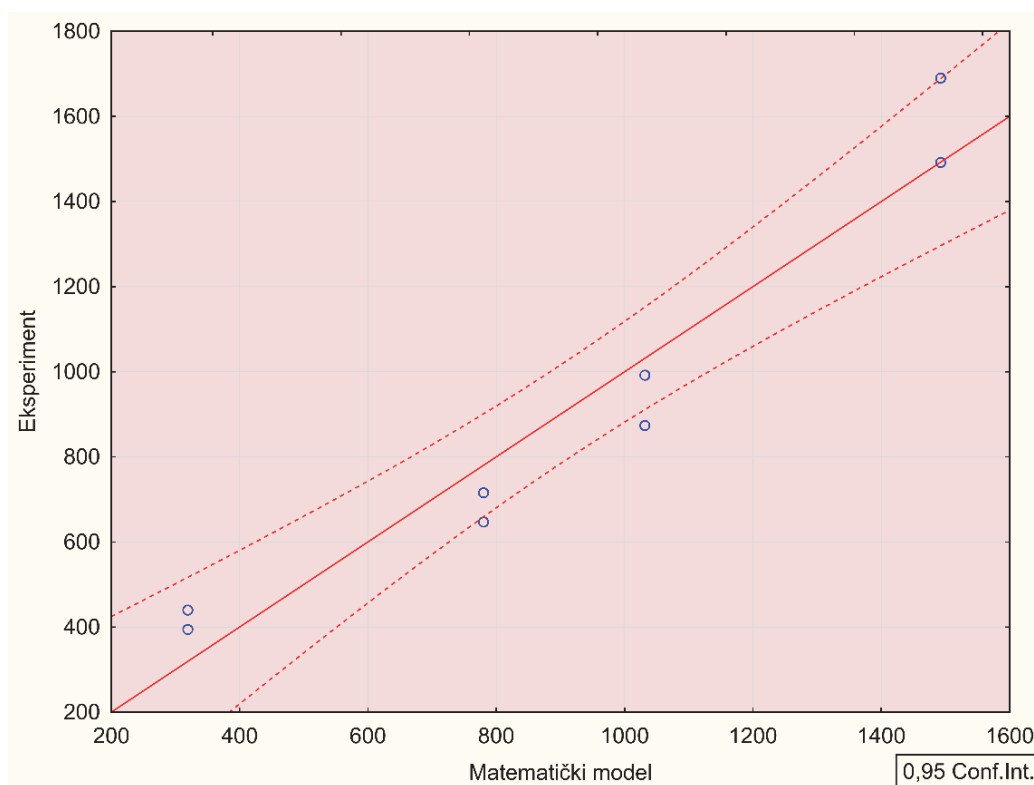
Test adekvatnosti modela proveden je pomoću analize varijance (ANOVA). Iz tablice 3.22 može se vidjeti da je model adekvatan.

Tablica 3.22. Analiza varijance za polinom prvog stupnja

Izvor varijabilnosti	Suma kvadrata	Stupnjevi slobode	Srednji kvadrat	F-vrijednost	Razina adekvatnosti
Model	1440355	2	720177,3	33,47326	0,001273
Ostatak	107575	5	21515,0		
Ukupno	1547930				

Tablica 3.23. Eksperimentalni rezultati, rezultati modela i ostatak

	Eksperiment	Model	Ostatak
1	440,000	319,000	121,000
2	395,000	319,000	76,000
3	992,000	1031,500	-39,500
4	874,000	1031,500	-157,500
5	716,000	780,000	-64,000
6	647,000	780,000	-133,000
7	1690,000	1492,500	197,500
8	1492,000	1492,500	-0,500



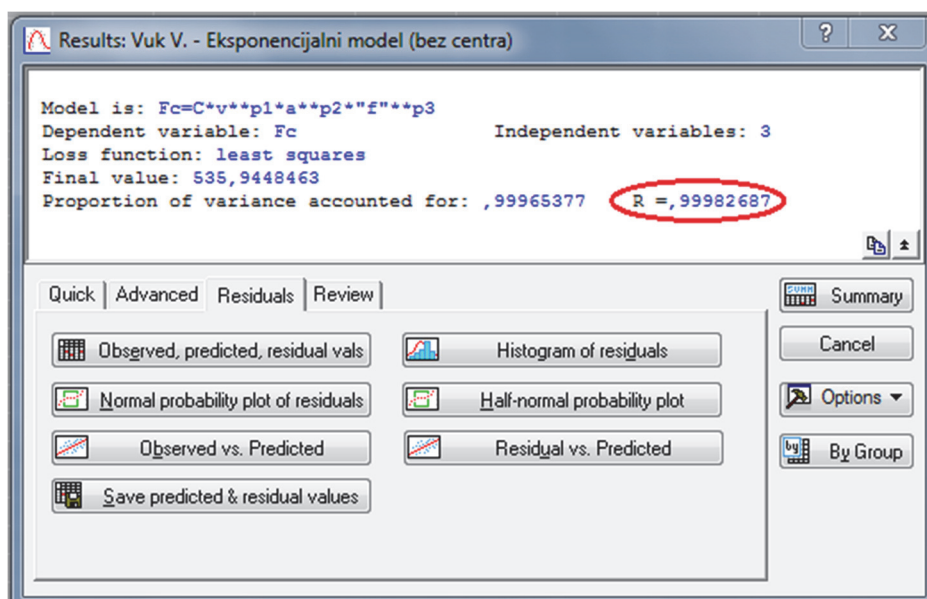
Slika 3.24. Dijagram usporedbe rezultata eksperiment – model

### 3.3.5.2. Exponencijalni model – modul „Nonlinear estimation“

Polazna jednačba, za glavnu silu rezanja, kod plana pokusa bez ponavljanja u centru za eksponencijalni model glasi:

$$F_c = C \cdot v_c^{p_1} \cdot a_p^{p_2} \cdot f^{p_3} \quad (3.17)$$

Slijedi obrada podataka u programskom paketu Statsoft Statistica v10.0.1011.



Slika 3.25. Rezultati obrade podataka – Eksponecijalni model

Rezultati obrade podataka u programskom paketu Statistica prikazani su na slici 3.25 i u tablici 3.24.

Koeficijent korelacije za ekspanencijalni model iznosi:  $r = 0,99982687$ .

Tablica 3.24. Vrijednosti parametara ekspanencijalnog modela za glavnu silu rezanja  $F_c$

	Procjena	Standardna greška	t - vrijednost	Razina signifikantnosti (p)
C	2737,169	96,36468	28,4043	0,000009
p <sub>1</sub>	-0,084	0,00563	-14,8546	0,000120
p <sub>2</sub>	0,914	0,01217	75,0923	0,000000
p <sub>3</sub>	0,760	0,01339	56,7365	0,000001

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u matematički model dobiva se konačni izraz za traženu vrijednost glavne sile rezanja  $F_c$ :

$$F_c = 2737,169 \cdot v_c^{-0,084} \cdot a_p^{0,914} \cdot f^{0,760} \quad (3.18)$$

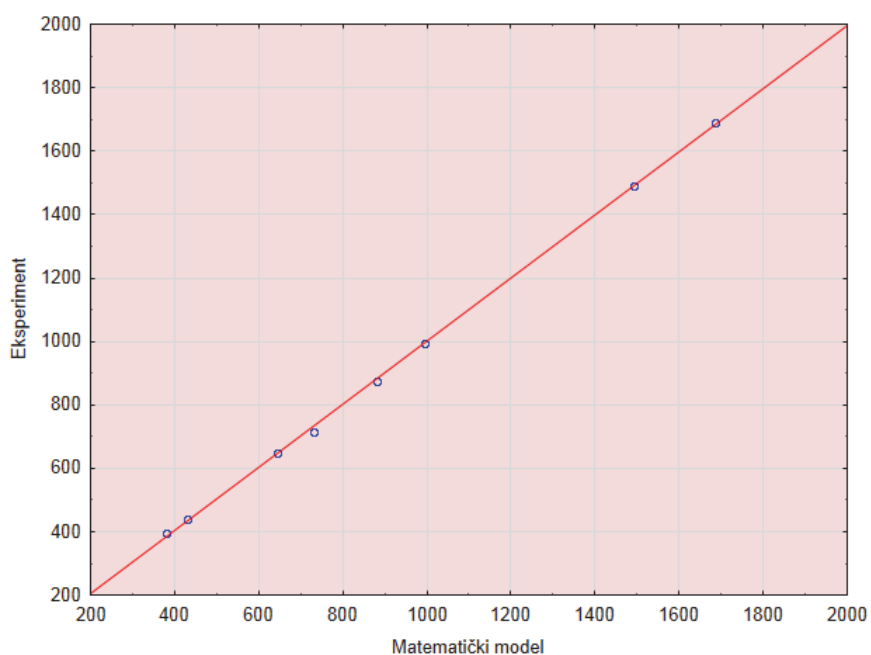
Test adekvatnosti modela proveden je pomoću analize varijance (ANOVA). Iz tablice 3.25 može se vidjeti da je model adekvatan.

Tablica 3.25. Analiza varijance za ekspanencijalni model

Izvor varijabilnosti	Suma kvadrata	Stupnjevi slobode	Srednji kvadrat	F-vrijednost	Razina adekvatnosti
Model	8110458	4,000000	2027615	15133,01	0,000000
Ostatak	536	4,000000	134		
Ukupno	8110994	8,000000			

Tablica 3.26. Eksperimentalni rezultati, rezultati modela i ostatak

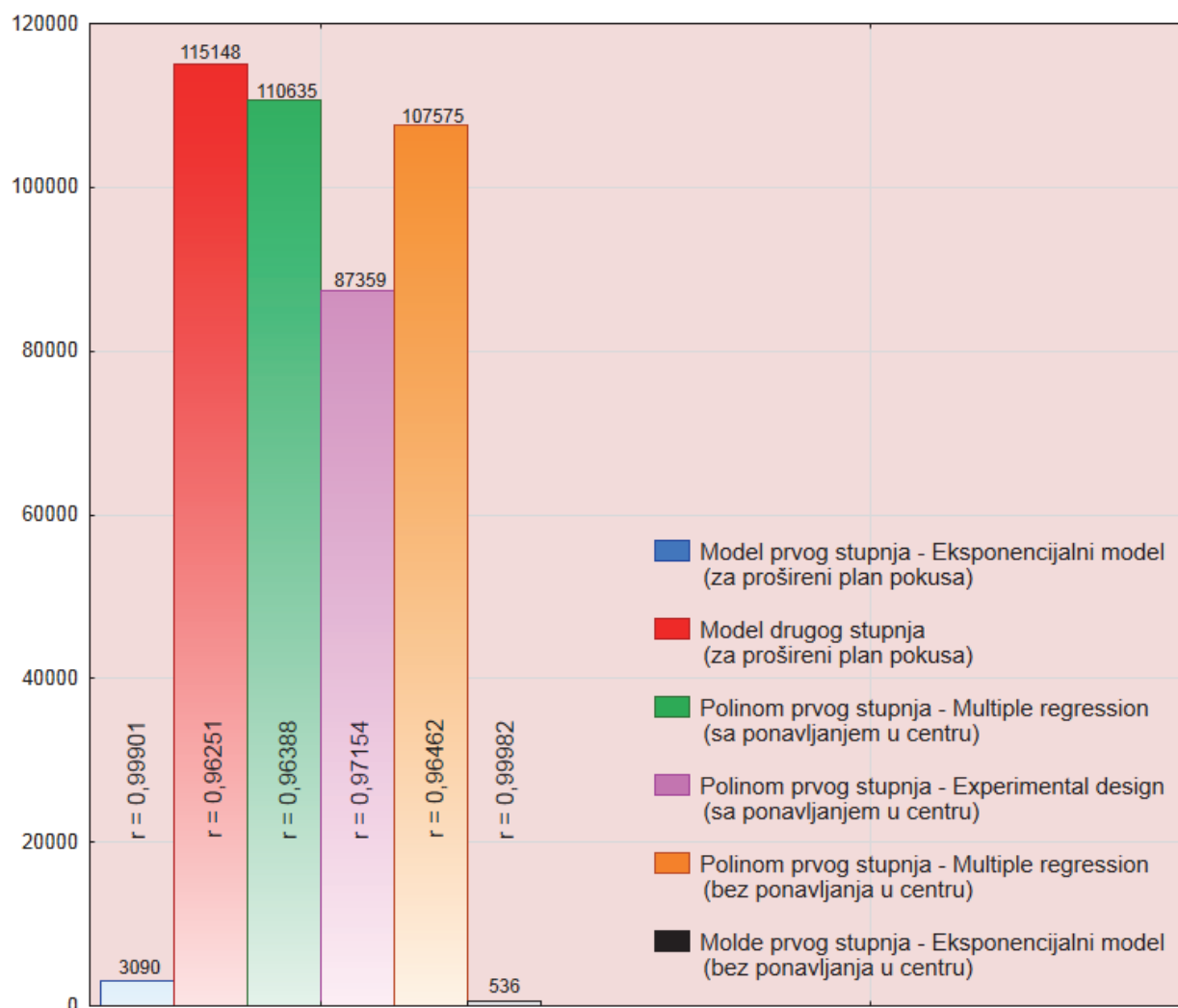
	Eksperiment	Model	Ostatak
1	440,000	430,803	9,1973
2	395,000	381,459	13,5412
3	992,000	994,970	-2,9698
4	874,000	881,007	-7,0065
5	716,000	729,471	-13,4709
6	647,000	645,918	1,0822
7	1690,000	1684,765	5,2347
8	1492,000	1491,793	0,2067



Slika 3.26. Dijagram usporedbe rezultata eksperiment – model

### 3.3.6. Analiza rezultata

Iz tablica analize varijance (ANOVA) vidljivo je da su svi dobiveni modeli adekvatni. Slika 3.27 prikazuje usporedbu koeficijenata korelacije i ostatka.



Slika 3.27. Usporedba vrijednosti koeficijenata korelacije i ostatka

Usporedbom rezultata koeficijenata korelacije i veličine sume kvadrata odstupanja pokazuje se da eksponencijalni model najbolje opisuje utjecaj parametara obrade na glavnu silu rezanja.



## 4. ZAKLJUČAK

U eksperimentalnom dijelu ovog rada najprije je provedena analiza usporedbe eksponencijalnog modela i modela drugog stupnja bez interakcija za plan pokusa sa ukupno 14 točaka. Iz provedene analize može se zaključiti da eksponencijalni model daleko bolje opisuje zavisnost glavne sile rezanja o parametrima obrade.

Zatim je provedena komparativna analiza za plan pokusa sa ponavljanjem u centru sa ukupno 12 točaka i plan pokusa bez ponavljanja u centru sa ukupno 8 točaka. Iz provedene analize rezultata može se zaključiti da plan pokusa bez ponavljanja u centru obrađen u programskom paketu Statistica daje zadovoljavajuće rezultate unatoč tome što ima manji broj točaka i ne provodi se ponavljanje točaka plana u centru. Pošto složeniji plan pokusa sa većim brojem eksperimentalnih točaka, uz veću sigurnost, nosi i veće financijske troškove i veći utrošak vremena u praksi težimo planu pokusa koji daje dobre rezultate uz što manji broj točaka tj. uz što manje troškove.

Ovom analizom pokazano je da eksponencijalni model adekvatno opisuje utjecaj parametara obrade na glavnu silu rezanja bez stvaranja dodatnog troška koji nastaje ponavljanjem točaka pokusa u centru. Završna odluka prilikom odabira plana pokusa je, naravno, na krajnjem korisniku koji mora donijeti odluku sukladno svojim željama, potrebama i mogućnostima.

## 5. LITERATURA

- [1] [www.fsb.unizg.hr/kas](http://www.fsb.unizg.hr/kas), pristupljeno 05.10.2014.
- [2] Schneider, George: Cutting tool application, GMRS Associates, 2002.
- [3] Ekinović, S.: Obrada rezanjem, Dom štampe, Zenica, 2001.
- [4] Škorić, S.: Istraživanje pogodnosti obrade ortogonalnim okruglim glodanjem, Doktorska disertacija, FSB, 2002.
- [5] Šavar, Š.: Obrada odvajanjem čestica, II dio, Zagreb, 1978.
- [6] [http://me.emu.edu.tr/me364/ME364\\_cutting\\_forces.pdf](http://me.emu.edu.tr/me364/ME364_cutting_forces.pdf), pristupljeno 05.10.2014.
- [7] Šavar, Š.: Obrada odvajanjem čestica, I dio, Zagreb, 1977.
- [8] Malagi, R.: Factors Influencing Cutting Forces in Turning and Development of Software to Estimate Cutting Forces in Turning, International Journal of Engineering and Innovative Technology, Volume 2, Issue 1, srpanj 2012.
- [9] Markopoulos, A. P.: Finite element method in machining processes, Springer London, 2013.
- [10] [http://books.google.hr/books?id=7Jpe8D0nRX8C&pg=PA30&lpg=PA30&dq=kienzle+specific+cutting+force+model&source=bl&ots=\\_UUSPUJZtj&sig=UnVpLdVQB1tyhzRXfc88IIS2bt4&hl=hr&sa=X&ei=O7EpU\\_v8B8PGtQad\\_ICIBw&ved=0CHcQ6AEwCA#v=onepage&q=kienzle%20specific%20cutting%20force%20model&f=false](http://books.google.hr/books?id=7Jpe8D0nRX8C&pg=PA30&lpg=PA30&dq=kienzle+specific+cutting+force+model&source=bl&ots=_UUSPUJZtj&sig=UnVpLdVQB1tyhzRXfc88IIS2bt4&hl=hr&sa=X&ei=O7EpU_v8B8PGtQad_ICIBw&ved=0CHcQ6AEwCA#v=onepage&q=kienzle%20specific%20cutting%20force%20model&f=false), pristupljeno 17.10.2014.
- [11] Stanić, J.: Teorija obrade metala, I dio, Mašinski fakultet, Beograd 1986.
- [12] Škorić, S.: Modeliranje funkcija obradivosti (predavanja), FSB, Zagreb, 2007.
- [13] [http://www.fsb.unizg.hr/atlas/upload/newsboard/30\\_03\\_2012\\_\\_16701\\_KRegress\\_OPTIPLAPOK\\_2012\\_Compatibility\\_Mode.pdf](http://www.fsb.unizg.hr/atlas/upload/newsboard/30_03_2012__16701_KRegress_OPTIPLAPOK_2012_Compatibility_Mode.pdf), pristupljeno 18.10.2014.
- [14] <http://www.gradst.hr/Portals/9/PropertyAgent/1167/Files/2706/prometnatehnikazaweb3.pdf>, pristupljeno 18.10.2014.
- [15] [http://web.efzg.hr/dok//sta/vbahovec/statisticke%20metode%20za%20ekonomske%20analize/6\\_PREDAVANJE\\_ANOVA&TESTOVI%20U%20MODELU%20JEDNOSTAVNE%20LINEARNE%20REGRESIJE.pdf](http://web.efzg.hr/dok//sta/vbahovec/statisticke%20metode%20za%20ekonomske%20analize/6_PREDAVANJE_ANOVA&TESTOVI%20U%20MODELU%20JEDNOSTAVNE%20LINEARNE%20REGRESIJE.pdf), pristupljeno 18.10.2014.
- [16] [www.kistler.com](http://www.kistler.com), pristupljeno 23.10.2014.
- [17] Šošić, I., Serdar, V.: Uvod u statistiku, Školska knjiga, Zagreb, 2002.
- [18] Šošić, I.: Primjenjena statistika, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

- [19] Šošić, I.: Zbirka zadataka iz statistike, Mikrorad, Ekonomski fakultet, Zagreb, 1998.
- [20] Aczel, A., Sounderpandian, J.: Business Statistics, McGraw-Hill/Irwin, 2002.
- [21] Montgomery, Douglas C.: DESIGN AND ANALYSIS OF EXPERIMENTS Eight Edition, John Wiley & sons, 2013.
- [22] <http://people.etf.unsa.ba/~ksokolija/c/ug/pees/definicije.html>, pristupljeno 29.10.2014.
- [23] [www.secotools.com](http://www.secotools.com), SECO katalog, pristupljeno 31.10.2014.
- [24] [www.trens.sk](http://www.trens.sk), pristupljeno 31.10.2014.
- [25] Wuhib, Y.: Optimalni režim rada kod obrade teškoobradivih materijala, mag rad, FSB, Zagreb 1989.
- [26] <http://documentation.statsoft.com/STATISTICAHelp.aspx?path=NonlinearEstimation/NonlinearEstimation/Dialogs/LeastSquares/NonlinearLeastSquaresResultsQuickTab>, pristupljeno 19.11.2014.
- [27] [http://www.unizd.hr/portals/4/nastavni\\_mat/2\\_godina/statistika/9\\_predavanje.pdf](http://www.unizd.hr/portals/4/nastavni_mat/2_godina/statistika/9_predavanje.pdf), pristupljeno 20.11.2014.